

# Bac Burkina Faso 2022

## Mathématiques Séries C-E

1er tour  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 6

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

### Exercice 1 (4 points)

On observe sur une grande période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour . Il est alors possible de proposer la modélisation suivante :

Pour  $n$  scooters franchissant le carrefour durant une année , on admet que la variable aléatoire  $S_n$  qui totalise le nombre d'accidents de scooters

à ce carrefour , durant cette année , suit une loi binomiale d'espérance mathématique  $E(S_n) = 10$  .

Soit  $P$  la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée .

1) Calculer  $P$  , puis donner l'expression de  $P(S_n = k)$  où  $k$  est un entier tel que  $0 \leq k \leq n$  .

2-a) Prouver que  $\ln [P(S_n = 0)] = -10 \frac{\ln \left(1 - \frac{10}{n}\right)}{\frac{10}{n}}$  pour tout entier naturel  $n$  non nul , puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = 0)$  .

b) Démontrer que pour tout  $k$  ,  $0 \leq k \leq n-1$  :  $P(S_n = k+1) = P(S_n = k) \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1}$  .

c) Démontrer par récurrence sur  $k$  , que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k) = e^{-10} \times \frac{10^k}{k!}$  , ( $0 \leq k \leq n$ ) .

3) On suppose que l'entier naturel  $n$  est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que  $e^{-10} \times \frac{10^k}{k!}$  est une approximation acceptable de  $P(S_n = k)$  .

Utiliser cette approximation pour calculer la probabilité qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour .

### Exercice 2 (4 points)

Le plan  $P$  est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique **4 cm**) , dans lequel on considère les points  $A(-\sin 3t; 4)$  ;  $B\left(\frac{3}{2} \sin t; 2 \cos t\right)$  et  $C(0; 4 \sin t)$  ,  $t$  étant un paramètre réel donné .

Soit  $G(t)$  le barycentre du système de points pondérés  $(A, 1)$  ,  $(B, 1)$  ,  $(C, 1)$  .

1) Montrer que les coordonnées du point  $G(t)$  sont :  $x(t) = \sin^3 t$  et  $y(t) = 1 + \cos t + \sin t$  .

2) Lorsque le paramètre  $t$  varie dans  $\mathbb{R}$  , le barycentre décrit une courbe  $(C)$  .

a) Etudier les positions relatives des points  $G(t)$  et  $G(t + 2\pi)$  , et en déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude à  $[-\pi, \pi]$  .

b) Etudier le sens de variations de  $x$  et  $y$  .

c) Dresser le tableau de variations conjoint de  $x$  et  $y$  .

d) Tracer la courbe  $(C)$  .

On donne  $\sqrt{2} \approx 1,4$ .

### Problème (12 points)

#### Partie A (5,25 points)

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = \ln(|\ln x|)$ .

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique **2 cm**.

1-a) Montrer que l'ensemble de définition de  $f$  est  $D = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

b) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D$ .

2-a) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.

b) Déterminer les points d'intersection de  $(C)$  et l'axe des abscisses, puis les tangentes à  $(C)$  en ces points.

c) Construire la courbe  $(C)$ .

3) Soient  $g$  et  $h$  les fonctions de la variable réelle  $x$  définies sur  $]1, +\infty[$  et sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$  par :  $g(x) = \ln(\ln x)$  et  $h(x) = \ln(|\ln(|x|)|)$ .

a) Expliquer comment obtenir les courbes  $(C_g)$  et  $(C_h)$  des fonctions  $g$  et  $h$  à partir de la courbe  $(C)$  de  $f$ .

b) Construire les courbes  $(C_g)$  et  $(C_h)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Partie B (4,5 points)

On considère la fonction  $\varphi$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$  par :  $\varphi(x) = \frac{1}{x \ln(|x|)}$ .

1-a) Montrer que l'on peut restreindre le domaine d'étude de  $\varphi$  à l'intervalle  $E = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

b) Calculer les limites de  $\varphi$  aux bornes de  $E$ .

c) Calculer  $\varphi'(x)$  pour  $x \in E$ . Donner le sens de variation de  $\varphi$  sur  $E$  et dresser son tableau de variations sur  $E$ .

2) Soit  $a$  un nombre réel tel que  $1 < a \leq e$ .

On désigne par  $A(a)$ , l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que : 
$$\begin{cases} a \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq \varphi(x) \end{cases}$$

a) Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine  $A(a)$ .

b) Déterminer  $\lim_{a \rightarrow 1} A(a)$ .

3) On pose, pour tout  $x \in E$ ,  $\psi_1(x) = \varphi(x) - x$  ( $I$ ).

a) Montrer que l'équation  $\psi_1(x) = 0$  admet dans  $E$  une racine unique  $\alpha > 1$ .

b) Exprimer en fonction de  $a$ , les racines de l'équation ( $I$ ) dans  $\mathbb{R}$ .

4) En étudiant le signe de la fonction  $\psi_2$  définie par  $\psi_2(x) = \varphi(x) + x$ , montrer que l'équation  $\psi_2(x) = 0$  n'admet pas de solution réelle.

#### Partie C (2,25 points)

On considère la fonction  $t$ , définie sur  $\mathbb{C}^* \setminus \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$  par :  $t(z) = \frac{1}{z \ln|z|}$ .

Soit  $(P)$  le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On note  $T$  l'application de  $(P)$  dans lui-même qui à tout point  $M$  d'affixe  $z = x + yi$

associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{1}{z \ln|z|}$ .

1) Déterminer l'ensemble  $E_1$  des images  $M$  de  $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$

2) Exprimer le module et les arguments de  $z'$  au moyen de ceux de  $z$ .

3) Déterminer l'ensemble des points invariants par  $T$ .

- 4) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du domaine de  $T$  qui sont tels que l'origine  $O$ , le point  $M$  et son image  $M' = T(M)$  soient alignés .
- 5) Quel est le transformé par  $T$  d'un cercle de centre  $O$  et de rapport  $r \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  .