



المدرسة الوطنية للتكنولوجيا  
Ecole Nationale Polytechnique



# Association Scientifique El-maarifa

## | Section El-Nour

Présente:

Séries d'exercices :

# Anlyse Math

Réaliser par: Le Club Scientifique  
de l'Association

Adresse: Association Scientifique El-Maarifa  
Ecole Natinale Polytechnique  
Hassan Badi - B.P 16200 Belfort  
El-harrach / Alger

## Chapitre 1-SERIES NUMERIQUES

### 1 Définitions

1. On appelle série numérique toute somme infinie  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  notée  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ;
  2. On dira que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est convergente si et ssi la suite des sommes partielles associée  $(S_n)_n$  est convergente où  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$ .
- On notera par  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  la somme de la série ie.  $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ;

### 2 Règles de convergence des séries à termes positifs

Soient  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  deux séries numériques à termes positifs.

1. Règle de comparaison. Si  $u_n \leq v_n$  au voisinage de l'infini alors :

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  converge  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge;

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  diverge  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$  diverge.

2. Règle des equivalences. Si  $u_n \sim_{\infty} v_n$  alors  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  sont de même nature.

3. Règle de d'Alembert. Supposons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$  où  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  alors :

(a) si  $\ell < 1$ , la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge;

(b) si  $\ell > 1$ , la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  diverge;

4. Règle de Cauchy. Supposons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$  où  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  alors :

(a) si  $\ell < 1$ , la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge;

(b) si  $\ell > 1$ , la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  diverge;

5. Règle  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} u_n$ .

(a) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n = 0$ , alors la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge;

(b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \infty$ , alors la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  diverge;

6. **Règle de Rabee ou Duhamel.** Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \ell$  où  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  alors :

- (a) si  $\ell < 1$ , la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge ;  
 (b) si  $\ell > 1$ , la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  diverge ;

7. **Règle de Gauss.** Supposons que  $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{c_n}{n^2}$  où  $c_n$  est une suite bornée,  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . Alors :

- (a) si  $\alpha > 1$ , la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge  $\forall \beta \in \mathbb{R}$  ;  
 (b) si  $\alpha < 1$ , la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  diverge  $\forall \beta \in \mathbb{R}$  ;  
 (c) si  $\alpha = 1$ , la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge si  $\beta > 1$  et diverge si  $\beta < 1$  ;

8. **Règle de comparaison avec une intégrale.** Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[m, +\infty[$  où  $m \in \mathbb{N}$ , positive et décroissante. Alors la série  $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$  et l'intégrale généralisée  $\int_m^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature.

### 3 Séries à termes de signe non constant

#### 3.1 Définitions

Soit  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  une série à termes de signe non constant.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est **absolument convergente** si la série  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  converge ;
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  est **semi-convergente** si elle converge simplement et diverge absolument ;

#### 3.2 Règles de convergence des séries à termes de signe non constant

1. **Règle de Leibnitz.** Soit  $u_n$  une suite numérique **positive** telle que :  
 (a)  $u_n \geq u_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  ( $u_n$  monotone décroissante au voisinage de l'infini) ;  
 (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  ;

alors la série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$  converge et  $|S_n - S| \leq u_{n+1}$ .

2. **Règle d'Abel.** Soit  $u_n$  et  $v_n$  deux suites numériques telles que :  
 (a) la suite  $u_n$  est monotone croissante ou monotone décroissante ;  
 (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  ;

(c)  $\exists M > 0$  tel que  $\left| \sum_{k=1}^{k=n} v_k \right| \leq M$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;

alors la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$  est convergente.

3. **Règle de Dirichlet.** Soit  $u_n$  et  $v_n$  deux suites numériques telles que :  
 (a) la suite  $u_n$  est croissante ou monotone décroissante ;  
 (b) la suite  $u_n$  est bornée ;

(c) la série  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  converge

alors la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$  est convergente.

SERIES NUMERIQUES

Exercice 1

Par la méthode des sommes partielles, calculer les sommes des séries numériques suivantes :

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$

Ind. Pour la série (c), montrer que :  $\arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2

Etablir à l'aide de la condition nécessaire de convergence la divergence des séries dont les termes généraux sont donnés par :

(a)  $\cosh n$ ;

(b)  $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ;

(c)  $n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ ;

(d)  $\frac{n^n}{2^n}$ .

Exercice 3

En utilisant les règles de Cauchy et de D'Alembert, donner la nature des séries dont les termes généraux sont donnés par :

(a)  $\frac{n \cdot n!}{(2n)!}$ ;

(b)  $\frac{(n!)^2}{2n^2}$ ;

(c)  $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ ;

(d)  $\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ ;

(e)  $\left(\frac{2n+a}{3n+b}\right)^{n^2}, (a, b \in \mathbb{R}_+)$ ;

(f)  $\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}}, (a, b \in \mathbb{R}_+)$ .

Exercice 4

A l'aide du critère des équivalences, donner la nature des séries suivantes :

(a)  $\sum_n n^{-(1+\frac{1}{n})}$ ;

(b)  $\sum_n \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}}, (a, b \in \mathbb{R}_+)$ ;

(c)  $\sum_n \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$ ;

(d)  $\sum_n \sqrt{\cosh \frac{1}{n} - 1}$ ;

(e)  $\sum_n \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ;

(f)  $\sum_n (\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1})$ .

Exercice 5

En appliquant la règle de Raabe ou Duhamel, étudier la nature des séries :

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{k=1}^n (2 + \sqrt{k})}$ ;

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\alpha} \frac{1}{n^{\beta}}$  où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $n!! = \begin{cases} 2.4 \dots (2k) & \text{si } n = 2k \\ 3.5 \dots (2k+1) & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$

**Exercice 6**

Déterminer la nature des séries de termes généraux suivant :

- (a)  $\frac{(-1)^n}{\tanh n}$ ; (b)  $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ ; (c)  $\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n} + \cos n\pi}$ ;  
 (d)  $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^{\frac{n}{\ln n}}}$ ; (e)  $(-1)^n \frac{\sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ .

**Exercice 7**

Considérons la série de terme général  $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$ .

1. Montrer que  $u_n = (-1)^n v_n$  où  $v_n$  est le terme général d'une suite numérique à déterminer;
2. Vérifier que la série  $\sum_n u_n$  est alternée;
3. En déduire par la règle de Leibnitz la nature de  $\sum_n u_n$ .

**Exercice 8**

En appliquant la règle d'Abel, déterminer la nature des séries :

- (a)  $\sum_n \frac{\cos \alpha n \ln n}{n}$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; (b)  $\sum_n \frac{\cos 5n}{\sqrt{n} \ln n}$ ; (c)  $\sum_n \frac{(-1)^n \cos n}{\sqrt{n} + 1}$ .

**Exercice 9** (EMD 1 année 2005-2006)

Le but de cet exercice est l'étude de la semi-convergence de deux séries numériques.

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  deux séries numériques dont les termes généraux sont donnés par :

$$u_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$$

et

$$v_n = \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^\beta}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres réels.

1. Donner la condition nécessaire de convergence de chacune des deux séries;
2. Déterminer par la méthode des développements limités en 0 la nature des deux séries;
3. Etudier la convergence absolue de  $\sum_n u_n$  et  $\sum_n v_n$ ;
4. En déduire les valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  lesquelles  $\sum_n u_n$  et  $\sum_n v_n$  sont semi-convergentes.

## Chapitre 2-Suites et Séries de Fonctions

### 1 SUITES DE FONCTIONS

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions numériques définies sur un domaine  $D \subset \mathbb{R}$ .

#### 1.1 Définitions

1. La suite  $(f_n)_n$  est simplement convergente sur  $D$  si la suite numérique  $(f_n(x))$  est convergente pour tout  $x$  fixé dans  $D$  (c'est à dire si,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in D$ );
2. La suite  $(f_n)_n$  est uniformément convergente sur  $D$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$ .

#### 1.2 Propriétés des suites de fonctions uniformément convergentes

1. Théorème de continuité. Supposons que :

- (a) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \in C^0(D)$
  - (b) la suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $D$  vers la fonction limite  $f$ ;
- alors  $f$  est continue sur  $D$  (c'est à dire,  $f \in C^0(D)$ ) et l'on a,  $\forall x, x_0 \in D$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

2. Théorème de dérivation. Supposons que :

- (a)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \in C^1(D)$  (c'est à dire,  $f_n$  est continûment dérivable sur  $D$ );
  - (b) il existe un point  $x_0 \in D$  telle que la suite numérique  $f_n(x_0)$  converge vers  $f$ ;
  - (c) la suite de fonctions  $(f'_n)_n$  converge uniformément sur  $D$ ;
- alors la fonction limite  $f$  est continûment dérivable sur  $D$  (c'est à dire,  $f \in C^1(D)$ ) et l'on a

$$f'(x) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

3. Théorème d'intégration. Supposons que :

- (a) la suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge uniformément sur vers une fonction  $f$  sur  $D$ ;
  - (b)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est intégrable sur  $[a, b]$  (c'est à dire  $\left| \int_a^b f_n(x) dx \right| < \infty$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ );
- alors la fonction limite  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et

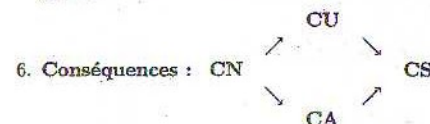
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right).$$

### 2 SERIES DE FONCTIONS

Soit  $(u_n(x))_n$  une suite de fonctions numériques définies sur le domaine  $D$  de  $\mathbb{R}$ .

#### 2.1 Définitions

1. On appelle série de fonctions de terme général  $u_n$  toute somme infinie  $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$   
notée  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ;
2. **Convergence Simple-CS** : la série est simplement convergente sur  $D$  si la série numérique  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  est convergente pour tout  $x$  fixé dans  $D$ ;  
*Remarque* : L'étude de la convergence simple des séries de fonctions s'effectue à l'aide des règles de convergence des séries numériques où  $x$  est un paramètre de  $D$ .
3. **Convergence Absolue-CA** : la série est absolument convergente sur  $D$  si la série de fonctions  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$  est simplement convergente;  
*Remarque* : L'étude de la convergence absolue des séries de fonctions utilise les règles de convergence des séries numériques à termes positifs où  $x$  est considéré comme un paramètre de  $D$ .
4. **Convergence Uniforme-CU** : La série de fonction  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  est uniformément convergente sur  $D$  si la suite des sommes partielles  $(S_n)$  (où  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ ) converge uniformément vers  $S$  sur  $D$ . C'est à dire si,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |S_n(x) - S(x)| = 0$ .
5. **Convergence Normale-CN** : la série est normalement convergente sur  $D$  si la suite numérique  $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in D} |u_n(x)|$  est convergente;



#### 2.2 Règles de Convergence Uniforme

1. **Règle de Weierstrass**. Toute série de fonctions normalement convergente l'est absolument aussi;
2. **Règle d'Abel**. Soient  $(u_n(x))$  et  $(v_n(x))$  deux suites de fonctions numériques définies sur  $D$  et telles que :
  - (a)  $(u_n(x))$  est monotone suivant  $n$  c'est à dire que  $u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$  (ou  $u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$ )  $\forall x \in D$ ;
  - (b) la suite de fonctions  $(u_n(x))$  converge uniformément vers zéro sur  $D$ ;
  - (c) il existe une constante  $M > 0$  telle que  $\left| \sum_{k=1}^n v_k(x) \right| \leq M$ ,  $\forall x \in D$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Alors, la série de fonctions  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot v_n(x)$  converge uniformément sur  $D$ ;
3. **Règle de Dirichlet**. Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites de fonctions numériques définies sur  $D$  et telles que :
  - (a)  $(u_n(x))$  est monotone suivant  $n$  c'est à dire que  $u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$  (ou  $u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$ )  $\forall x \in D$ ;
  - (b) il existe une constante  $M > 0$  telle que  $|u_n(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in D$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;
  - (c) la série de fonctions  $\sum_{k=1}^n v_k(x)$  converge uniformément sur  $D$ .

Alors, la série de fonctions  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot v_n(x)$  converge uniformément sur  $D$ ;

## 2.3 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes

1. **Théorème de continuité.** Supposons que :

(a) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n(x) \in C^0(D)$

(b) la série de fonctions  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  converge uniformément sur  $D$  vers la fonction limite  $S(x)$ ;

alors  $S$  est continue sur  $D$  (c'est à dire,  $S(x) \in C^0(D)$ ) et l'on a,  $\forall x, x_0 \in D$  :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x).$$

2. **Théorème de dérivation.** Supposons que :

(a)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n(x) \in C^1(D)$  (c'est à dire,  $u_n(x)$  est continûment dérivable sur  $D$ );

(b) il existe un point  $x_0 \in D$  telle que la série numérique  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  converge vers  $S$ ;

(c) la série de fonctions  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$  converge uniformément sur  $D$ ;

alors la fonction limite  $S$  est continûment dérivable sur  $D$  (c'est à dire,  $S \in C^1(D)$ ) et l'on a

$$S' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

3. **Théorème d'intégration.** Supposons que :

(a) la série de fonctions  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  converge uniformément sur vers une fonction  $S(x)$  sur  $D = [a, b]$ ;

(b)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n(x)$  est intégrable sur  $[a, b]$  (c'est à dire  $\left| \int_a^b u_n(x) dx \right| < \infty$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ );

alors la fonction limite  $S$  est intégrable sur  $[a, b]$  (c'est à dire,  $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$  existe) et

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b u_n(x) dx \right).$$

## 3 SERIES ENTIÈRES

### 3.1 Définitions

1. Une **série entière** est une série de fonctions de la forme  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  ( $a_n$  étant une suite numérique);

2. L'intervalle de convergence d'une série entière est  $I_c = ]-R, R[$  où  $R > 0$ . Cet intervalle peut-être aussi fermé ou semi-ouvert (selon que la série converge ou diverge en  $x = \pm R$ );

3. Le nombre réel  $R$  définit par  $R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$  ou tout simplement par  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$  est appelé **rayon de convergence**.

### 3.2 Propriétés des Séries Entières

Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  une série entière, notons  $R > 0$  son rayon de convergence.

1. La somme  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  vérifie les propriétés suivantes :

(a)  $S \in C^\infty(]-R, R[)$ ;

$$(b) \forall x \in ]-R, R[ : S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1};$$

$$(c) \forall x \in ]-R, R[ : \int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1};$$

2. **1er lemme d'Abel.**

(a) Si la série numérique  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  converge alors,  $\forall x \in ]-|x_0|, |x_0|[$ , la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge;

(b) Si  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  diverge alors la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  diverge pour tout  $x \in ]-\infty, -|x_0|[ \cup ]|x_0|, +\infty[$ ;

3. **2nd lemme d'Abel.**

(a) Si la série numérique  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  converge alors,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \rightarrow R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ;

(b) Si la série numérique  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$  converge alors,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \rightarrow -R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ;

### 3.3 Développement en séries entières de quelques fonctions élémentaires

$$1. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall x \in ]-1, 1[;$$

$$2. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in ]-1, 1[;$$

$$3. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$4. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$5. \exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$6. \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$7. \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$8. \arctan x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in [-1, 1];$$

SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

Exercice 1

Etudier la convergence simple sur le domaine  $D$  des suites de fonctions définies par :

- (a)  $f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$ ,  $D = \mathbb{R}$ ;  
(b)  $f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ ,  $D = ]0, +\infty[$ ;  
(c)  $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$ ,  $D = [0, 2]$ ;  
(d)  $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ,  $D = ]0, +\infty[$ ;

Exercice 2

Etudier la convergence uniforme de  $(f_n)_n$  sur  $D$  :

- (a)  $f_n(x) = x^n \sqrt{1 - x^2}$ ,  $D = [0, 1]$ ;  
(b)  $f_n(x) = n \left[ \sin \left(x + \frac{1}{n}\right) - \sin x \right]$ ,  $D = \mathbb{R}$ ;  
(c)  $f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)$ ;  $D_1 = \mathbb{R}$ ,  $D_2 = [-a, a]$  où  $a > 0$ .

Exercice 3

Etudier la convergence simple des séries de fonctions suivantes :

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \ln x$ ;  
(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}$ ,  $x > 0$ ;  
(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan n^2 (1 + x^2) \right]$ .

Exercice 4

Etudier la convergence normale des séries dont les termes généraux sont :

- (a)  $u_n(x) = e^{-n(x^2 + \sin x)}$ ,  $D = [1, +\infty[$ ;  
(b)  $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$ ,  $D = [0, +\infty[$ .

Exercice 5

Etudier la convergence uniforme sur  $D$  des séries suivantes :

- (a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( \frac{n^2 + x^2}{n^2} \right)$ ,  $D = [-a, a]$ ,  $a > 0$ ;  
(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2x}{x^2 + n^3}$ ,  $D = \mathbb{R}$ ;  
(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{x}}$ ,  $D = ]0, +\infty[$ ;  
(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^2 + x}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ,  $D = [0, 1]$ .

Exercice 6

Considérons la suite de fonctions de terme général  $u_n(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^n}$ .

- Etudier la convergence normale de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  sur  $\mathbb{R}$  et sur  $D = [a, +\infty[$ ,  $a > 0$ ;
- Etudier la convergence uniforme de cette série sur  $\mathbb{R}$ .

Exercice 7

Soit la suite de fonctions  $f_n(x)$  définies sur  $[0, 2]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{si } 0 \leq x < 1 - \frac{1}{n} \\ (1 - n)(x - 1) & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 + \frac{1}{n} \\ -1 + \frac{1}{n} & \text{si } 1 + \frac{1}{n} < x \leq 2 \end{cases}$$

1. Tracer dans le même repère orthonormé les courbes représentatives de  $f_4$ ,  $f_8$  et  $f_{1000}$ ;
2. Montrer que  $(f_n)_n$  converge simplement vers une fonction  $f$  que l'on déterminera.  
Tracer le graphe de  $f$  dans le même repère.
3. Calculer  $\sup_{x \in [0,2]} |f_n(x) - f(x)|$ .

La convergence de  $(f_n)_n$  est-elle uniforme sur  $[0, 2]$  ?

### Exercice 8

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , considérons la suite de fonctions de terme général  $f_n$  définies sur  $[-1, 1]$  par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ |x| & \text{si } \frac{1}{n} < |x| \leq 1 \end{cases}$$

On admet (sans démonstration) que  $f_n \in C^1([-1, 1])$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Tracer dans le même repère orthonormé les courbes représentatives de  $f_2$ , et  $f_8$ ;
2. Montrer que  $(f_n)_n$  converge simplement vers une fonction  $f$  que l'on précisera.  
Dessiner le graphe de  $f$  dans le même repère;
3. Montrer que la convergence de  $(f_n)_n$  est uniforme sur  $[-1, 1]$ ;
4. Est-ce que convergence de la suite de fonctions  $(f'_n(x))_n$  est uniforme sur  $[-1, 1]$  ?

### Exercice 9

Considérons la suite de fonctions  $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$  définies sur  $D_n = [0, 1]$ .

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)_n$ ;

2. Etudier la suite  $\int_0^1 f_n(t) dt$ . Que peut-on conclure ?

### Exercice 10

Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_n a_n x^n$  avec :

(a)  $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

(b)  $a_n = \frac{(n-1)^n}{(n+1)!}$

(c)  $a_n = \ln\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)$ .

### Exercice 11 (EMD 2 année 2004-2005)

Soit la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} x^{3n+2}$  où  $x$  est une variable réelle.

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série;
2. Montrer que sa somme  $S(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^3} dt$ ;
3. Donner une décomposition en éléments simples de la fraction  $\frac{1}{1+t^3}$  sachant que  $1+t^3 = (1+t)(1-t+t^2)$ ;
4. En déduire la valeur de chacune des deux séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(6n+2)(6n+5)}$$

Séries Entières

Exercice 1

Soit la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$ . Notons  $f(x)$  sa somme.

- Déterminer son rayon de convergence;
- (a) Montrer que pour certains  $x \geq 0$ , on peut écrire  $f$  sous la forme  $f(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ , où  $g$  est la somme de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ ;  
(b) Utiliser le rayon de  $f$  pour calculer celui de  $g$ ;  
(c) En citant soigneusement le théorème utilisé, dériver la fonction  $g$  et la calculer sur un intervalle à préciser;  
(d) En déduire une expression de  $f$  sur  $[0, 1[$ ;  
(e) Donner la valeur de la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

Exercice 2

- (a) Développer en série entière la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{1}{1+x}$   
(b) Préciser son rayon de convergence;  
(c) En déduire un développement en série entière sous la forme  $\sum_{n \geq 0} a_n x^{n+3}$  de la fonction  $g(x) = \frac{x^3}{2+x}$ .  
Préciser son rayon.
- (a) Trouver les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  tels que :  $\frac{x^3}{2+x} = x^2 + \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x+2}$ ;  
(b) En déduire la valeur de  $\int_0^1 \frac{t^3}{2+t} dt$
- (a) Intégrer le développement en série entière de  $g$  en citant soigneusement le théorème utilisé;  
(b) En déduire la valeur de  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+4)2^{n+1}}$ .

Exercice 3

Pour chacune des séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence  $R$ , calculer la somme pour  $x$  dans  $] -R, R[$  et si cela a un sens examiner ce qui se passe lorsque  $x = R$  ou  $x = -R$ .

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ ;  
(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ ;  
(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ ;  
(d)  $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$

Ind. Pour la série (d) remarquer que  $n^3$  est une combinaison linéaire de  $1$ ,  $n$ ,  $n(n-1)$  et  $n(n-1)(n-2)$ , c'est à dire que  $n^3 = n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2)$ ;

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n x^n &= \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

**Les exercices suivants sont facultatifs.  
Ils ne seront pas obligatoirement corrigés en TD**

**Exercice 12** (Exercice facultatif)

Soit la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ ,  $D = ]0, +\infty[$ .

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la somme  $S(x)$  et trouver une relation entre  $S(x+1)$  et  $S(x)$ ;
2. Montrer que pour tout  $x \in D$ , on a  $S(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ ;
3. Vérifier l'équivalence  $S(x) \sim \frac{1}{2x}$ .

**Exercice 13** (EMD 2 année 2003-2004) (Exercice facultatif)

Soit la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$  où  $x$  est une variable réelle.

1. Calculer le rayon de convergence  $R$  de cette série;
2. En intégrant les termes de cette série, déterminer sa somme  $S(x)$ .

**Exercice 14** (EMD 2 année 2002-2003) (Exercice facultatif)

Soit la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$  où  $x$  est une variable réelle.

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série;
2. Donner l'expression de la série dérivée correspondante;
3. En déduire la somme de la série numérique  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$ ;

**Ind.** La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle  $\frac{1}{1+x^4}$  est donnée par

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right).$$

Séries de Fourier

Exercice 1

1. Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique égale à  $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$  sur  $[-\pi, \pi]$ . Calculer les coefficients de Fourier de  $f$  ;
2. En déduire les valeurs des sommes :

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  ;

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$  ;

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

Exercice 2

1. Développer en série de Fourier la fonction 2-périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1-x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{si } x \in ]0, 1] \end{cases} ;$$

2. En déduire que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

Exercice 3 (EMD III, 2004-2005)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |\cos x|$  et  $g(x) = |\sin x|$ .

1. Tracer les graphes des deux fonctions. Que peut-on remarquer ?
2. Développer les deux fonctions en séries de Fourier ;
3. En utilisant le théorème de convergence de Dirichlet, l'égalité de Parseval et l'égalité de Parseval généralisée<sup>1</sup>, calculer la somme de chacune des séries numériques suivantes :

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2+1}$ ,

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ ,

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$ ,

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)^2}$  ;

Exercice 4 [Rattrapage, 2000-2001]

Soient  $\alpha$  un nombre réel strictement positif et  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, définie sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  par  $f(x) = \operatorname{ch}(\alpha x)$  ;

1. Déterminer le développement en série de Fourier de cette fonction ;
2. Calculer les sommes des séries numériques  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$  ;
3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , montrer que :

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t}{t^2 + n^2 \pi^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sinh t} - \frac{1}{t} \right) ;$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{t^2 + n^2 \pi^2} = \frac{1}{2} \left( \coth t - \frac{1}{t} \right).$

1. L'égalité de Parseval généralisée :  $\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n)$  où  $a_n$ ,  $\alpha_n$  et  $b_n$ ,  $\beta_n$  sont les coefficients de Fourier des fonction,  $2\ell$ -périodiques,  $f$  et  $g$  respectivement.

**Exercice 5** [Synthèse, 2005-2006]

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique donnée sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  par

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi + x) & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x(\pi - x) & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de  $f$ . Que peut-on remarquer ?
2. Déterminer le développement en série de Fourier de cette fonction ;
3. En déduire les sommes des deux séries trigonométriques, à l'aide du théorème de dérivation en justifiant les étapes de calcul :

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi]; \quad \text{et b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, \quad x \in ]0, \pi[;$$

4. En déduire la somme de chacune des séries numériques :

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}; \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}; \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

5. Calculer à l'aide de l'égalité de Parseval les sommes : a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ ; b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$

6. En utilisant les combinaisons appropriées, déterminer la valeur des sommes : a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ ; b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ .

**Exercice 6** [Synthèse, 2006-2007] (Facultatif)

Soient la fonction  $f$ ,  $2\pi$ -périodique et impaire définie sur  $[0, \pi]$  par  $f(x) = x$  et la fonction  $g$ , paire et  $2\pi$ -périodique donnée par  $g(x) = x^2$  sur  $[0, \pi]$ .

1. a) Développer  $f$  en série de Fourier ;

$$\text{b) Calculer les sommes des séries } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1};$$

2. a) En déduire, par intégration, le développement en série de Fourier de  $g$ ;

$$\text{b) Déterminer les sommes des séries } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4};$$

3. a) déterminer, à l'aide du développement en série de Fourier de  $g$ , la somme de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \sin nx \sin ny$ ,

$$\text{pour } x, y \text{ vérifiant } |x| \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } |y| \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\text{b) En déduire la valeur de la somme } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

**Exercice 7** (Facultatif)

- (I) En remarquant que  $1 + x^2 - 2x \cos \alpha = (e^{i\alpha} - x)(e^{-i\alpha} - x)$ , développer en série entière à l'origine la fonction

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2 - 2x \cos \alpha}, \quad x, \alpha \in \mathbb{R};$$

- (II) Soit la fonction  $g_{\beta}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour  $\beta \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} - \pi\mathbb{Z}\right)$ , par :  $g_{\beta}(x) = \frac{1}{1 - \sin \beta \cos x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;

1. Montrer que  $g_{\beta+2\pi} = g_{\beta}$  et  $g_{\pi-\beta} = g_{\beta}$ ;

2. Vérifier que l'étude suivant  $\beta$  de  $g_{\beta}$  peut être restreinte à l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ;

3. Expliciter  $g_{\beta}$  en fonction de  $f_{\alpha}$ ;

4. En déduire le développement en série de Fourier de la fonction  $g_{\beta}$ ;

5. Donner la valeur de l'intégrale  $I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{2 - \sqrt{3} \cos x} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

## Intégrales Curvilignes - Intégrales Surfiques

### A-Intégrales Curvilignes

#### 1. Définitions

1. Si  $L$  est une courbe dans l'espace, on définit une intégrale curviligne de :

(a) 1ère espèce par :  $\int_L F(x, y, z) dl;$

(b) 2ème espèce par :  $\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz;$

2. Si  $L$  est une courbe d'équation paramétrique  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}, \forall t \in [a, b],$

et d'extrémités  $A = (\varphi(a), \psi(a), \chi(a))$  et  $B = (\varphi(b), \psi(b), \chi(b))$ . Notons  $S$  la longueur de  $L$ . Alors :

(a)  $S = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt,$

(b)  $\int_L F(x, y, z) dl = \int_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt;$

(c)  $\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$   
 $= \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \chi'(t)] dt$

3. Si  $L$  est une courbe dans  $\mathbb{R}^2$  (plane) donnée explicitement par  $y = g(t), \forall t \in [a, b]$ , alors :

(a)  $S = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(t))^2} dt;$

(b)  $\int_L F(x, y) dl = \int_a^b F(t, h(t)) \sqrt{1 + (g'(t))^2} dt;$

(c)  $\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(t, h(t)) dt$  et  $\int_L Q(x, y) dy = \int_a^b Q(t, h(t)) \times g'(t) dt$

#### 2. Propriétés

1. [Formule de Green.] Soient  $P, Q \in C^1(D)$ ,  $D$ -domaine de  $\mathbb{R}^2$  délimité par une courbe fermée  $L$  (parcourue dans le sens trigonométrique), alors

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Il en découle :

(a) l'aire de  $D$  est  $\text{aire}(D) = \frac{1}{2} \oint_D x dy - y dx = \oint_L x dy = - \oint_L y dx;$

(b)  $\int_L P dx + Q dy$  ne dépend pas du chemin si et seulement si  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};$

(c)  $\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$  ne dépend pas du chemin si et seulement si  $\overrightarrow{\text{Rot } F} = 0$

où  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

et  $\text{Rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$

# B-Intégrales de Surface

## 1. Définitions

Soit  $\Sigma$  une surface d'équation  $z = f(x, y)$  avec  $f \in C^1$  et telle que toute parallèle à  $Oz$  coupe  $\Sigma$  au plus en un point. Soient  $D = \text{proj}_{Oxy} \Sigma$  et  $(x, y) \in D$ .

1.  $\vec{n}$  la normale unitaire à  $\Sigma$  au point  $(x, y)$  est donnée par  $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  où  $\alpha = (\vec{n}, \vec{Ox})$ ,  $\beta = (\vec{n}, \vec{Oy})$ ,  $\gamma = (\vec{n}, \vec{Oz})$ . Ainsi,

$$\vec{n} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \left(1, -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k})$$

où  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  (les cosinus directeurs de  $\vec{n}$ ) vérifient  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ;

2. Aire  $(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$ ;
3. L'intégrale de surface de 1ère espèce est définie par :

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy;$$

4. L'intégrale de surface de 2ème espèce est définie par :

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma$$

$$\text{où : } \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \iint_D P(x, y, f(x, y)) dx dy = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \cos \alpha d\sigma,$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \iint_D Q(x, y, f(x, y)) dz dx = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) \cos \beta d\sigma,$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_D R(x, y, f(x, y)) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma;$$

## 2. Propriétés

[Formule d'Ostrogradski.] Si  $\Sigma$  est une surface fermée entourant le volume  $\Omega$ ,  $P, Q, R \in C^1(\Omega)$

et  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  alors

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div } \vec{F} dv$$

où  $\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ . C'est à dire :

$$\oint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \oint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

[Formule de Stokes.] Soient  $\Sigma$  est une surface ouverte entourée par une courbe fermée  $L$ ,  $P, Q$  et  $R \in C^1(\Omega)$

et  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  alors

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

où  $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ . C'est à dire,

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma$$

$$= \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dx dy + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dy dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dz dx.$$

**Exercice 5**

Calculer par deux méthodes, les intégrales de surface suivantes :

1.  $I = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$  où  $\mathbf{F} = 4xy \vec{i} - y^2 \vec{j} + yz \vec{k}$  et  $\Sigma$  est la surface du cube délimité par les six plans  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$  et  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à  $\Sigma$ ;
2.  $I = \iint_{\Sigma} [(y-z) \cos \alpha + (z-x) \cos \beta + (x-y) \cos \gamma] \, d\sigma$  où  $\Sigma$  est la surface conique ouverte d'équation  $x^2 + y^2 = z^2$  avec  $0 \leq z \leq h$  et  $\cos \gamma < 0$ .

**Exercice 6 (Synthèse 2006-2007)**

Considérons les trois surfaces données par les équations  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$  et  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0$ . Soient les surfaces :

$\Sigma_1$ -la portion conique extérieure au cylindre et intérieure à la sphère;

$\Sigma_2$ -la surface cylindrique comprise entre le cône et la sphère;

$\Sigma_3$ -la partie sphérique extérieure au cône.

1. Déterminer l'aire de  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$ ;
2. Trouver les masses de  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$  si leur densités massiques sont  $\rho_2(x, y, z) = z$  et  $\rho_3(x, y, z) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ , respectivement;
3. Déterminer les composantes de la normale unitaire extérieure (ie. telle que  $\cos \gamma < 0$ ) à  $\Sigma_1$ ;
4. Soient  $F(y, 2x, z^2)$  et  $\Sigma_1^+$  la partie de  $\Sigma_1$  correspondante à  $y > 0$ .
  - (a) Calculer à l'aide d'une méthode directe le flux du champ  $F$  à travers  $\Sigma_1$  ( $I = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ );
  - (b) Retrouver le résultat par la formule d'Ostrogradski;
5. (a) Déterminer la circulation du champ  $F$  le long du contour  $L_1 = \partial \Sigma_1^+$  ( $\oint_{L_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ );
- (b) Reprendre le calcul par la formule de Stokes.

**Exercice 7 (Rattrapage 2006-2007)**

Considérons les trois surfaces données par les équations  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$  et  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0$ . Soient les surfaces :

$\Sigma_1$ -la portion conique extérieure au cylindre et intérieure à la sphère;

$\Sigma_2$ -la surface cylindrique comprise entre le cône et la sphère;

$\Sigma_3$ -la partie sphérique extérieure au cône.

1. Déterminer l'aire de  $\Sigma_1$ ;
2. Trouver la masse de  $\Sigma_1$  si sa densité massique est  $\rho_1(x, y, z) = z$ ;
3. Déterminer les composantes de la normale unitaire extérieure à  $\Sigma_2$  et les composantes de la normale unitaire extérieure (telle que  $\cos \gamma < 0$ ) à  $\Sigma_3$ ;
4. Soient  $F(y, 2x, z^2)$  et  $\Sigma_2^+$  la partie de  $\Sigma_2$  correspondante à  $y > 0$ .
  - (a) Calculer à l'aide d'une méthode directe le flux du champ  $F$  à travers  $\Sigma_2$  ( $I = \iint_{\Sigma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ );
  - (b) Retrouver le résultat par la formule d'Ostrogradski;
5. (a) Déterminer la circulation du champ  $F$  le long du contour  $L_2 = \partial \Sigma_2^+$  ( $\oint_{L_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ );
- (b) Reprendre le calcul par la formule de Stokes.

## ii. Solutions particulières.

-Méthode de la variation des constantes : Ayant un système fondamental de solutions  $y_1, \dots, y_n$  de l'équation homogène, on détermine la solution générale sous la forme

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

où les fonctions dérivées  $c'_k$  vérifient le système algébrique :

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + \dots + c'_n y_n = 0 \\ c'_1 y_1^{(n-2)} + \dots + c'_n y_n^{(n-2)} = 0 \\ c'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c'_n y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

-Si le second membre  $f$  est donné par l'une des fonctions  $f_1(x) = (d_0 x^k + \dots + d_k) e^{\gamma x}$  où  $f_2(x) = [(b_0 x^k + \dots + b_k) \cos \beta x + (c_0 x^\ell + \dots + c_\ell) \sin \beta x] e^{\alpha x}$ , alors :

\*) si  $\gamma$  et  $\alpha + i\beta$  ne sont pas racines de l'équation caractéristique, on a :

pour $f_1(x)$	$y_p(x) = (D_0 x^k + \dots + D_k) e^{\gamma x}$
pour $f_2(x)$	$y_p(x) = [(B_0 x^m + \dots + B_m) \cos \beta x + (C_0 x^m + \dots + C_m) \sin \beta x] e^{\alpha x}$

avec  $m = \max(k, \ell)$

\*\*) si  $\gamma$  et  $\alpha + i\beta$  sont racines de multiplicité  $S$  alors  $y_p$  s'obtient par multiplication de la solution précédente par  $x^S$ , c'est à dire :

pour $f_1(x)$	$y_p(x) = x^S (D_0 x^k + \dots + D_k) e^{\gamma x}$
pour $f_2(x)$	$y_p(x) = x^S [(B_0 x^m + \dots + B_m) \cos \beta x + (C_0 x^m + \dots + C_m) \sin \beta x] e^{\alpha x}$

$m = \max(k, \ell)$

## (b) Cas où les coefficients ne sont pas constants.

i. **Equations d'Euler.** Elles sont de la forme

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

où  $x > 0$  ou bien  $x < 0$ .

Ces équations se ramènent à des équations différentielles à coefficients constants par le changement de fonctions  $x = e^t$  si  $x > 0$  et  $x = e^{-t}$  si  $x < 0$

## Equations Différentielles

### Exercice 1

Soit la famille de solutions  $\{y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = e^x\}$

1. Déterminer le Wronskien de cette famille;
2. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 3 satisfaite par la famille  $\{y_1, y_2, y_3\}$ ;
3. Intégrer l'équation différentielle  $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 8y^{(2)} - 12y' + 8y = 0$  sachant que  $\lambda = -2$  est solution de l'équation caractéristique;

### Exercice 2

1. Résoudre l'équation d'Euler donnée par :  $(1+x)^3 y''' - (1+x)y' - 3y = 6(1+x)^3$ ;
2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \alpha(x^2 y_1'' + x y_1' - y_1) + x^2 y_2'' + x y_2' - y_2 = 0 \\ x^2 y_1'' + x y_1' - y_1 + \alpha(x^2 y_2'' + x y_2' - y_2) = 0 \end{cases}$$

### Exercice 3

Le but de cet exercice est la recherche, par deux méthodes différentes (la méthode du Wronskien et la méthode de résolution de l'équation auxiliaire), de la deuxième solution du système fondamental des équations différentielles suivantes :

1.  $(1+x)y'' - y' - xy = 0$  sachant que  $y_1 = e^x$  est une solution particulière sur  $] -1, +\infty[$ ;
2.  $y'' \cos x + y' \sin x - y \cos^3 x = 0$  sachant que  $y_1 = e^{\sin x}$  est une solution particulière sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$ ;

### Exercice 4

1. Par la méthode de D'Alembert, intégrer les équations différentielles homogènes suivantes :

(a)  $y'' + 2xy' + (x^2 + 5)y = 0$ ;

(b)  $y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = 0$ ;

2. (a) Intégrer l'équation différentielle  $y'' + 2xy' + (x^2 + 1)y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$  par la méthode de la variation de la

### Exercice 5

Résolution de l'équation différentielle  $y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = \sqrt{x}$ ,  $x > 0$ ;

1. Déterminer le système fondamental de cette équation en cherchant des solutions particulières de l'équation homogène sous la forme  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;
2. Donner la solution particulière de l'équation complète par la méthode de la variation des constantes;
3. En déduire la solution générale de l'équation complète.

### Exercice 6

Le but de cet exercice est la résolution de l'équation de Tchebychev  $(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$  avec  $\alpha \neq 0$  telle que  $|x| < 1$  ou  $|x| > 1$

1. Soit  $y(x) = z(t)$ . Déterminer l'équation satisfaite par la fonction auxiliaire  $z$  ainsi que sa solution si :

- (a)  $|x| < 1$ ,  $x = \cos t$ ,  $t \in ]0, \pi[$ ;
- (b)  $x > 1$ ,  $x = \cosh t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $x < -1$ ,  $x = -\cosh t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;

2. Intégrer l'équation différentielle  $(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0$

## Systèmes Différentiels

### Exercice 7