

24/11/2013

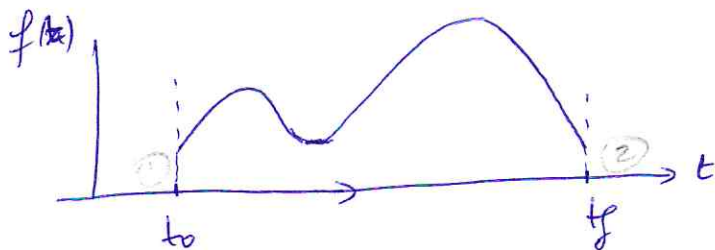
~ 20

Principe de minimum de PonTRIAGIN

ou principe du maximum

Introduction

Les fbs de commande optimale que nous avons traités, supposaient que $u(t)$ pouvait prendre n'importe quelle valeur, mais ds la pratique la commande est f's contrainte (ne peut pas faire ce qu'on veut)
 \Rightarrow la condition d'optimalité $\delta J(u, \delta u) = 0$ n'est plus valable
 à titre d'introduction (de comparaison, d'indication) regardons quelles sont les conditions nécessaires d'extremum pour φ et qd nous sommes sur les bords d'un intervalle



B'habitude pour trouver le min ou le max on faisait le DT pour trouver pt mais on prenait δt qd or ici sur les bords sur ① δt ne peut être que > 0 et sur ② δt ne peut être que < 0 alors que à l'intérieur δt peut être > 0 ou < 0 ce qui oblige $f'(t_0) = 0 \Rightarrow$ est d'optimalité

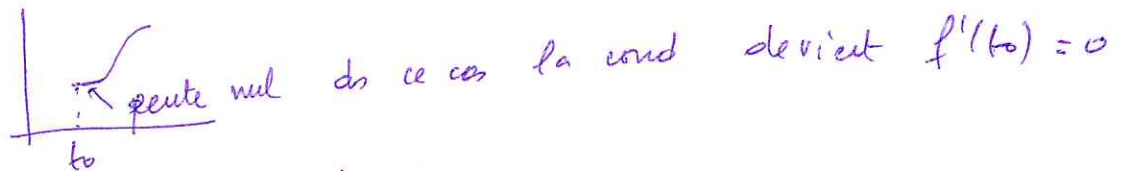
$$f(t) = f(t_0) + \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0} \delta t + o(\|\delta t\|^2) \Rightarrow f(t) - f(t_0) = f'(t_0) \delta t + o(\|\delta t\|^2)$$

t_0 est un min local $\Rightarrow f(t) - f(t_0) > 0$

ici δt ne peut être que positif \Rightarrow la cdt de min est $f'(t_0) > 0$ [car δt est > 0 en t_0]

pareil pour t_f mais δt doit être < 0
 donc $f'(t_f)$ doit être < 0 pour que f soit un min

Si on a un dessin comme



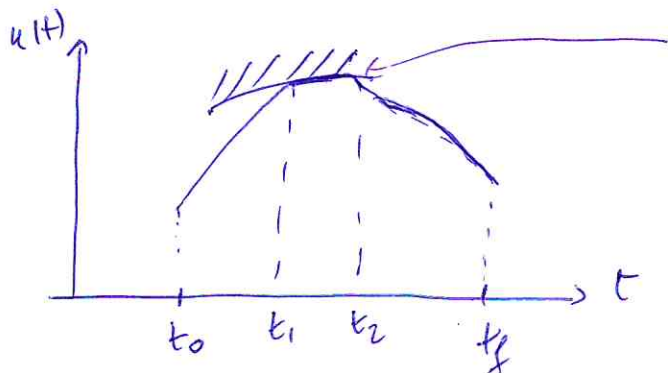
donc de ce cas général $f'(t_0) \geq 0$

" sur l'autre bord $f'(t_f) \leq 0$

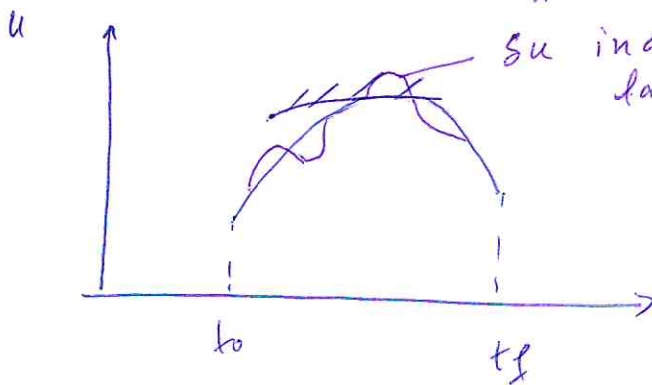
au pt t_f il faut $f'(t_f) \leq 0$.

Principe du Minimum

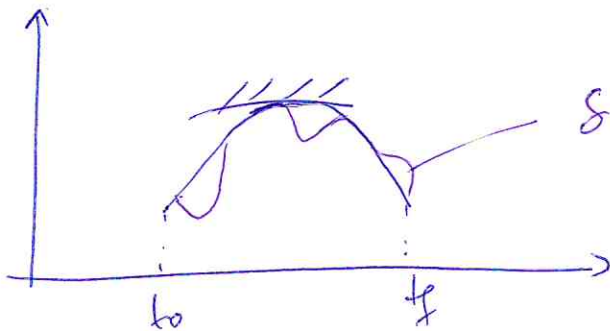
Considérons les dessins suivants:



$u(t)$ ne peut faire ce qu'elle veut sur le bord de la contrainte
 δu ne peut être q'cg de $\delta J(u, \delta u)$



δu inadmissible car il fait sortir δu de la frontière



δu admissible car δu ne sort pas des frontières

J fonctionnelle

$u^*(t)$ réalise un minimum de $J(u)$ \Rightarrow

$$\textcircled{1} \Delta J = J(u) - J(u^*) \geq 0 \Rightarrow J(u^* + \delta u) - J(u^*) = J(u^*) + \delta J(u^*, \delta u) - J(u^*) + o(\delta u)$$

$$\Delta J(u^*, \delta u) = \delta J(u^*, \delta u) + \text{p.o.s}$$

$\delta J(u^*, \delta u)$ est linéaire en δu

en présence de contraintes su ne peut pas être qco, il faut qu'il soit admissible

donc pour $su \ll$ les TOS $\rightarrow 0$

donc la condition d'optimalité

$\Delta J(u^*, \delta u) \geq 0$ si $u^* \in$ à la frontière du domaine
durant $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$

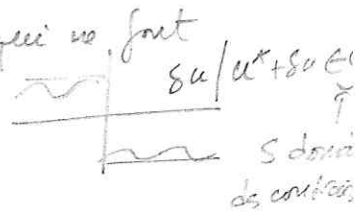
tout à l'heure pour le jet $\delta t > 0 \rightarrow J'(t_0) \geq 0$

ici on ne peut rien dire car su est à l'intérieur de $\Delta J(u^*, \delta u)$

donc ce sera en jet de su qu'il faut déduire la cdt sur l'autre morceau qui va être \propto par su

Attention $\Delta J(u^*, \delta u) \geq 0$ est ce cdt valable tout le tps (pour un men)

car elle est déduite de ① (à en gk)
par ex $u \in [-1, 1]$ on construit des su qui ne font pas sortir de $[-1, 1]$



D'oresnavant la CNO sera $\Delta J \geq 0$

On reprend l'expression générale de ΔJ (constante limite)

$$\begin{aligned} \Delta J(u^*, \delta u) = & \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f))^T \delta x_f + \left(J_L(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f)) \right. \\ & + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \delta t_f + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\dot{p}^*(t) + \frac{\partial J_L}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t)) \right] \delta x(t) \right. \\ & + \left. \left[\frac{\partial J_L}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right]^T \delta u(t) \right\} dt + \dots \end{aligned}$$

si les équations d'état sont vérifiées et elles le doivent $(t_f) = 0$

de saison et de la dernière fin

on prenait pour δp et δq particulièrement de valeurs /

$$(\delta p) = 0$$

$$(\delta q) = 0 \quad \text{et les CL vérifiées}$$

mais on peut garder $(\delta p) = 0$

mais $(\delta u) \underline{\delta u} \neq 0$ car δu maintenant est contrainte

si δq d'états

et on choisit $p(t)$ / le coef de $\delta x(t)$ sont nul et de cond aux limites vérifiées

il nous reste $\delta J(u^*, \delta u) = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial H}{\partial u} (x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right)^T \delta u(t) \delta t \geq 0$

qd on passe de δJ à δJ on néglige de δp qui avait

à cause de la cond d'optimalité

donc $\frac{\partial H}{\partial u}$ peut être vu comme le PT de δu qui a δu

d'intégrande (ce qui est sous l'intégrale) représente le 1er ordre de l'Hamiltonien due à δu seul

$$\frac{\partial H}{\partial u} (x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)^T \delta u(t) = H(x^*(t), u^*(t) + \delta u(t), p^*(t), t) - H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)$$

ce qu'on a gagné, et on remplace cette qd de \int

$$\delta J(u^*, \delta u) = \int_{t_0}^t (H(x^*(t), u^*(t) + \delta u(t), p^*(t), t) - H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)) \delta t \geq 0$$

on s'est débarrassé de δu !!

$\forall \delta u$ admissible

\Rightarrow

$$\int_{t_0}^t f(t) \geq 0 \quad \text{pour } [t_0, t] \geq 0 \quad \text{donc la fct est } \geq 0 \quad \dots \textcircled{A}$$

(il ya des démonstration mais à la fin)

on passe à la fin

on peut croire que c'est vrai

$$\Rightarrow H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \geq H(x^*(t), u^*(t) + \delta u(t), p^*(t), t) \Rightarrow u^*$$

qd il n'y a pas de contraintes $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$

c'est le principe de minimiser l'Hamiltonien

(4)

① on peut même que c'est vrai car
mais en fait cette eq n'est pas très vraie car
l'ordre de cette fct est > 0 sous qu'ils ont



et $b, t_f > 0$
mais si on fait d'autres démonstrations on peut arriver
à cette conclusion

il ne n'est pas vrai de dire que $\int fct > 0$ si la fct est > 0
mais ça reste vrai (après la démonstration) donc
l'application n'est pas très vraie mais ça peut se démontrer donc au
final c'est vrai!

Résumé

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt$$

Trouver $u^*(t)$ qui minimise $J(u)$

$$JL(x(t), u(t), p(t), t) \triangleq g(x(t), u(t), t) + p^T(t) (a(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t))$$

C.N.O

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial JL}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), t)$$

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial JL}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t)$$

$$\forall t \in [t_0, t_f]$$

$$JL(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \leq JL(x^*(t), u(t), p^*(t), t) \quad \forall u \text{ admissible}$$

ou peut s'intéresser aux démonstrations
mais au final c'est avec ça qu'on va résoudre les problèmes

et les conditions aux limites

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f)) - p^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[JL(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) - \frac{\partial JL}{\partial t}(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0$$

Remarques:

- 1/ $u^*(t)$ minimise J globalement (car $\forall u$ admi.)
- 2/ Ces cots s'appliquent même si $u(t)$ n'est pas contraints, la dernière devient $\frac{\partial J}{\partial u} = 0$ et $\frac{\partial^2 J}{\partial^2 u} > 0$ Def Positive DP

Exemple 1) cas particulier si J est particulier et u sans contrainte ou peut exprimer $u^*(t)$ (analytiquement)

$$J(x(t), u(t), p(t), t) = f(x(t), p(t), t) + \left(C(x(t), p(t), t) \right)^T u(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R(t) u(t)$$

lin $\forall u(t)$ quad $\forall u$ lin } \Rightarrow c'est quad

C'est une matrice $(n \times 1)$, $R(t)$ symétrique et inversible et DP $\forall t$

$$\frac{\partial J}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = C(x^*(t), p^*(t), t) + R(t) u^*(t) \stackrel{\text{sans contrainte}}{=} 0$$

$$\Rightarrow u^*(t) = -R(t)^{-1} C(x^*(t), p^*(t), t)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial u^2} = R(t) > 0 \quad \forall t > 0$$

R^T mais comme R est sym donc on peut écrire R

Exemple:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (x_1^2(t) + u^2(t)) dt \quad x_f \text{ libre, } t_f \text{ fixé}$$

1/ Trouver les C.N.O pour u non entrainé

$$J(x(t), u(t), p(t), t) \stackrel{(C)}{=} \frac{1}{2} (x_1^2(t) + u^2(t) + p_1(t) x_2(t) + p_2(t) (-x_2(t) + u(t)))$$

cette fct ressemble à (B)

$$\dot{x}_1^*(t) = \left(\frac{\partial J}{\partial p_1} \right)^* = x_2^*(t)$$

$$\dot{x}_2^*(t) = \left(\frac{\partial J}{\partial p_2} \right)^* = -x_2^*(t) + u^*(t)$$

$$\dot{p}_1^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = -x_1^*(t)$$

$$\dot{p}_2^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -p_1^*(t) + p_2^*(t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = u^*(t) + p_2^*(t) = 0 \Rightarrow \boxed{u^*(t) = -p_2^*(t)}$$

cond aux limites $\delta x_f \neq 0$ et $\delta t_f = 0$

$$p^*(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f)) \stackrel{!}{=} 0 \text{ car } \underline{h=0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ds le critère il n'y a pas} \\ \text{de coût final} \end{array} \right)$$

$$p_1^*(t_f) = 0$$

$$p_2^*(t_f) = 0$$

2/ Trouver $u^*(t)$ si $-1 \leq u^*(t) \leq +1$ $t \in [t_0, t_f]$

ici toutes eq sont les m[^]e sauf $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$ est remplacée par

$$\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \leq \mathcal{H}(x^*(t), u(t), p^*(t), t) \quad \textcircled{D}$$

qd on va remplacer ds \textcircled{C} les termes en x_1^* et x_2^* de part et d'autre ds \textcircled{D} se simplifient, il reste:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} u^{*2}(t) + p_2^*(t) u^*(t) \leq \frac{1}{2} u^2(t) + p_2^*(t) u(t)$$

$$\Rightarrow u^*(t) \text{ minimise la fct } \frac{1}{2} u^2(t) + p_2^*(t) u(t) \quad \textcircled{E}$$

regardons cette fonction \textcircled{E}

Pour rendre \textcircled{E} le plus petit possible alors ça va dépendre de ce qu'il y a ds $p_2^*(t)$

donc

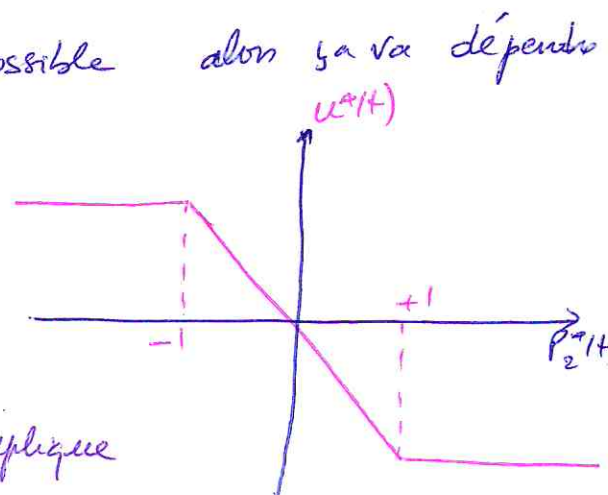
$$\text{si } p_2^*(t) > 0 \Rightarrow u^*(t) = -1$$

$$\text{si } p_2^*(t) < 0 \Rightarrow u^*(t) = +1$$

il s'il n'est pas sur les bords on applique

$$u^*(t) = -p_2^*(t)$$

mais si on est sur les bords on applique -1 ou +1



Eq: si on veut résoudre et trouve $p_2^*(t)$ on doit résoudre
 la eq où $u(t) = -p_2(t)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

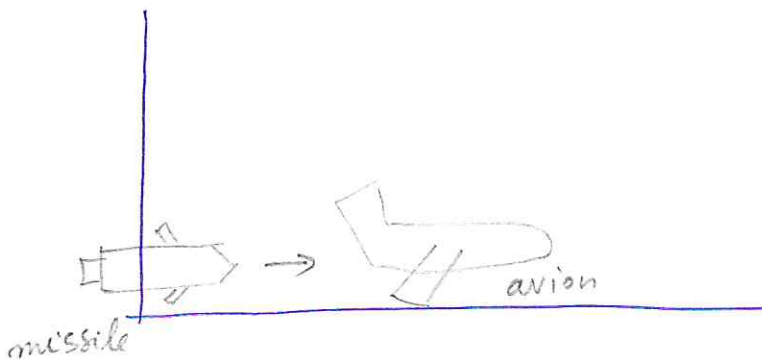
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Phi}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = e^{\Phi t} x_0$$

il y a un papier
 qui s'appelle
 minitken un dubious
 ways to calculate etc

après on trouve $p_2(t)$ et on résout $\forall t$ à qd $p_2(t) > 0$
 ou < 0 pour trouver $u(t)$

Commande en temps minimum



le missile doit rattraper
 l'avion le plus vite
 possible \equiv en temps minimum

une commande en tp mini nécessaire et nécessaire ce com
 au max (ie sature)
 à partir de cet exemple, on voit que: 1/ le missile doit accélérer
 au maximum

2/ le pb peut ne pas avoir de solution
 (si l'avion a une vitesse bcp plus grande !!)

le pb en tp ^{min} peut ne
 pas avoir de sol

Le critère pour ce type de Pb est

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

le plus petit possible
avec t_f non connue !!
 t_0 connue

Rq il faut que la cible fasse partie de l'un des pts atteignable par la missile sinon on ne peut pas le toucher
mais il ya de développer des ... il ne va le faire

On s'intéresse à la classe des systèmes décrit par

$$\dot{x}(t) = a(x(t), t) + B(x(t), t) \cdot u(t)$$

B est la matrice (n x m)

et $M_i^- \leq u_i(t) \leq M_i^+$ ie toutes les com u_1, \dots, u_m sont bornées
 $i = 1, \dots, m$ $t \in [t_0, t^*]$
↑ optimal n'est pas connue car

M_i^- et M_i^+ sont connus

$$J(x(t), u(t), p(t), t) = 1 + \overset{\text{soit l'intégrale}}{P^T(t)} (a(x(t), t) + B(x(t), t) u(t))$$

Principe du minimum

$$\Rightarrow 1 + P^{*T}(t) (a(x^*(t), t) + B(x^*(t), t) u^*(t)) \leq 1 + P^{*T}(t) (a(x^*(t), t) + B(x^*(t), t) u)$$

donc il reste

$$P^{*T}(t) B(x^*(t), t) u^*(t) \leq P^{*T}(t) B(x^*(t), t) u(t)$$

cela implique que $u^*(t)$ minimise la fct

$$P^{*T}(t) B(x^*(t), t) u(t)$$

$$B(x^*(t), t) = \begin{bmatrix} b_1(x^*(t), t) & b_2(x^*(t), t) & \dots & b_m(x^*(t), t) \end{bmatrix}$$

b_i est un vecteur

$$P^{*T}(t) B(x^*(t), t) u(t) = \sum_{i=1}^m P^{*T}(t) b_i(x^*(t), t) u_i(t)$$

b_i est un vecteur

donc ce produit a un sens
 $P^{*T} \cdot b_i$

On suppose que les commandes indépendantes
 min $u^* \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_m^* \end{pmatrix}$ doit minimiser chaque étage

chaque u_i
 minimise
 sans la Σ

$u_i^*(t)$ doit minimiser $p^{*T}(t) b_i(\hat{x}(t), t) u_i(t)$

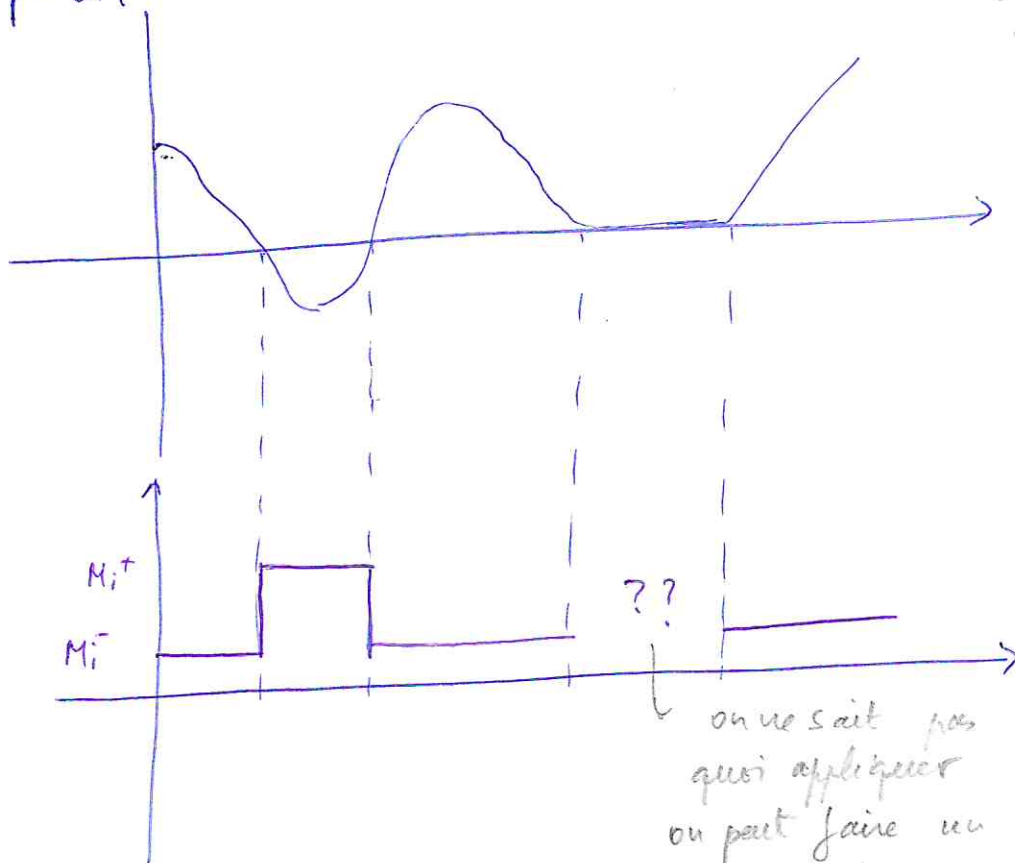
on sait $\pi_i^- \leq u_i \leq \pi_i^+$

si $p^{*T}(t) b_i(\hat{x}(t), t) > 0 \Rightarrow u_i^*(t) = \pi_i^-$

si $p^{*T}(t) b_i(\hat{x}(t), t) < 0 \Rightarrow u_i^*(t) = \pi_i^+$

$p^{*T}(t) b_i(\hat{x}(t), t) = 0$ alors u_i^* est indéterminé
 → Pb singulier

⇒ Commande Bang-Bang elle est au max ou au min



on va supposer qu'elle
 a cette forme

on ne sait pas
 quoi appliquer

on peut faire un Pb sous optimal
 en gardant une des bornes M_i^- ou
 jusqu'à sortir de la singularité

par ex si on veut arriver à un pt en voiture il faut accélérer
 au max et qd on arrive presque au pt on freine au max

≡ c'est la commande Bang-Bang.

01/12/19

• Les des systèmes linéaires invariants

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

A et B des matrices cste $A (n \times n)$; $B (n \times m)$

$|u_i(t)| \leq 1$ on aurait pu prendre $\neq 1$ (est juste pour simplifier les calculs)

* On suppose que le sy est complètement commandable ①

* On suppose le sy normal (pas d'intervalles singuliers à $P^T(t)$? \neq)

le pb posé : Trouver la commande $u^*(t)$ qui transfère l'état du sy de x_0 à x_f en temps minimum

si $x_f \neq 0$ on fait un chgt de variable pour revenir à 0

D'après la théorie si la commande existe, elle est de type

Bang-Bang \equiv Boum Boum

il faut pas oublier que la conditⁿ que on a vu est nécessaire
donc si la comob \exists elle vérifie la cdt

on va donner 3 théorèmes sans démonstrations

Théorème 1: d'existence

si toutes les V.P de A sont à PR Négatives ^{réelles} ou nulles

la commande optimale ^{au sens de temps minimum} qui transfère le sy de x_0 à 0 existe

①: on peut s'intéresser à nos compl^{ts} com mais le mode non con sta
or. car on peut rien faire sur leurs vitesses, ils vont imposer leur vitesses sur l'axe obs^{er} de tp mini n'a plus de sens.

Théorème 2: d'unicité

si une comode extrémale (pas forcément optimale au sens de tp) existe alors elle est unique

Conséquence : la com opti est une com extrémale
(car elle minimise un critère) donc si elle existe, elle est

unique. Donc une comde qui satisfait le principe du minimum et les cdt aux limites est une comde optimale
(si elle existe)

\Rightarrow le Principe du minimum de ce cas est une cdt nécessaire et suffisante d'optimalité. (61)

Théorème 3 nbre de commutation

la démonstration de ce th^m est avancée car th¹ et th² sont compliqués à démontrer

si toutes les VP de A sont réelles (négatives ou nulle) même si on les multiplie par 1
et une commande optimale existe (unique) alors chaque composante de $u^*(t)$ peut commuter au plus $(n-1)$ fois

Exemple :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

$$-1 \leq u(t) \leq 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

VP = $\{0, 0\} \Rightarrow u^*(t)$ existe et unique et le nbre de la com opt

commutation est égal au plus à $\Delta = n-1 = 2-1$

$$J = \int_t^T dt$$

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = 1 + p_1(t) x_2(t) + p_2(t) u(t)$$

la condition d'optimalité

$$\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \leq \mathcal{H}(x^*(t), u(t), p^*(t), t)$$

ie la com opt minimise l' \mathcal{H}

$$p_2^*(t) u^*(t) \leq p_2^* u(t)$$

D'après ça

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_2^*(t) < 0 \\ -1 & \text{si } p_2^*(t) > 0 \end{cases} = -\text{sign}(p_2^*(t))$$

maintenant on va trouver p_i^*

$$\dot{p}_1^* = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow p_1^*(t) = C_1$$

$$\dot{p}_2^* = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x_2} = -p_1^*(t) \Rightarrow p_2^*(t) = -C_1 t + C_2$$

$p_2^*(t)$ est une droite donc elle change de signe une seule fois
soit > 0 devient < 0 ou le contraire



donc au plus une commutation

on va écrire u^* proprement

imaginons qu'on ait atteint le cible avant que P_2 change de signe

\Rightarrow donc une seule commutation par besoin de commutation

donc soit $+1$ ou -1

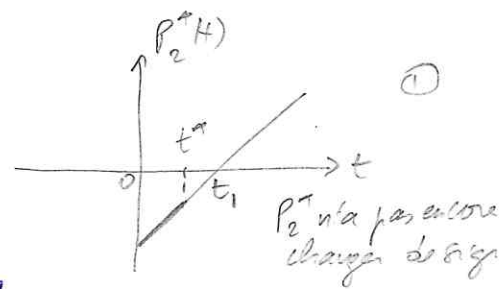
$$u^*(t) = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ -1 \end{cases}$$

$\forall t \in [t_0, t^*]$ le tp pour arriver à la cible

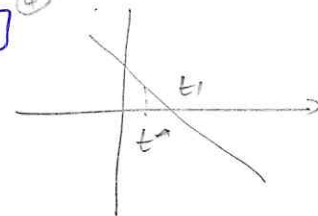
$\forall t \in [t_0, t^*]$ ①

$t \in [t_0, t_1]$ et -1 pour $t \in [t_1, t^*]$ ③

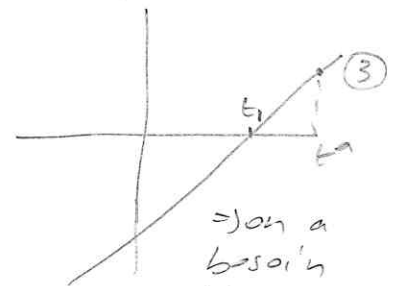
$t \in [t_0, t_1]$ et -1 $[t_1, t^*]$ ④



contraire



maintenir si t^*



\Rightarrow on a besoin d'une commutation car P_2^* change de signe ou le fait de signe contraire ④

On applique 1 si ①

-1 si ②

1 et -1 si ③

-1 et 1 si ④

On connaît maintenant $u^*(t)$, on va chercher les trajectoires optimales $x_1^*(t)$ et $x_2^*(t)$

$$\dot{x}_2^*(t) = \pm 1 \Rightarrow x_2^*(t) = \pm t + C_3$$

$$\Rightarrow \overset{\text{rien}}{x_1^*(t)} = \pm \frac{1}{2} t^2 + C_3 t + C_4$$

On peut trouver la trajectoire du plan ie éliminer le tp

$$x_2^{*2}(t) = t^2 \pm 2C_3 t + C_3^2 = 2\left(\frac{t^2}{2} \pm C_3 t + \frac{C_3^2}{2}\right)$$

$$\text{Si } u = 1 \Rightarrow x_2^{*2}(t) = 2\left(\frac{t^2}{2} + C_3 t + \frac{C_3^2}{2}\right) \text{ et } x_1^{*2}(t) = \frac{1}{2} t^2 + C_3 t + C_4$$

$$\text{donc } = 2x_1^*(t) + C_5 \text{ on peut la calculer}$$

$$= 2(x_1^*(t) - C_4) + C_3^2 \Rightarrow C_5 = -2C_4 + C_3^2 \quad (63)$$

$$\sin u = -1$$

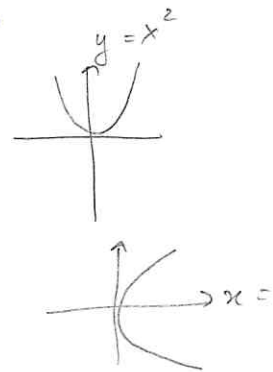
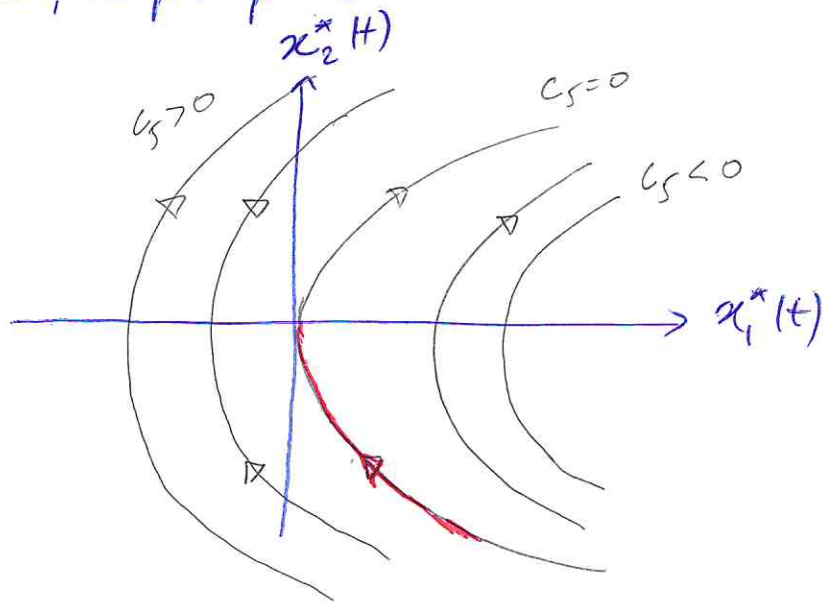
on va tracer $x_2^*(t) = -2x_1^*(t) + C_6$

$$u = 1$$

$$x_1^*(t) = \frac{1}{2} x_2^{*2} - \frac{C_5}{2}$$

⇒ les paraboles

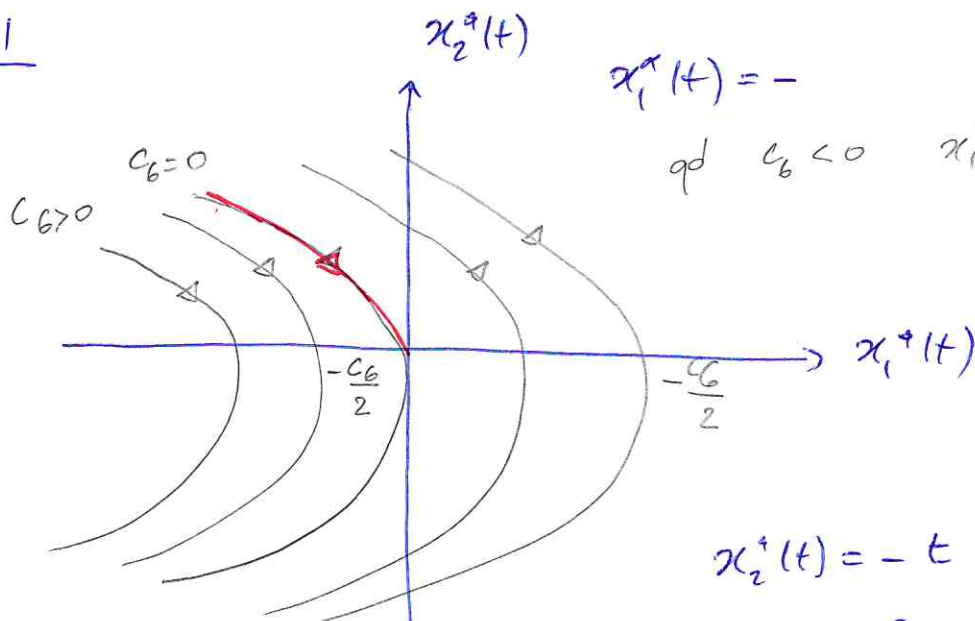
pour $C_5 = 0$, elle passe par 0



qd le tp augmente $x_2^*(t) = + \frac{t^2}{2} + C$

qd $t \uparrow$ $x_2^* \uparrow$
donc le sens \nearrow

$$u = -1$$



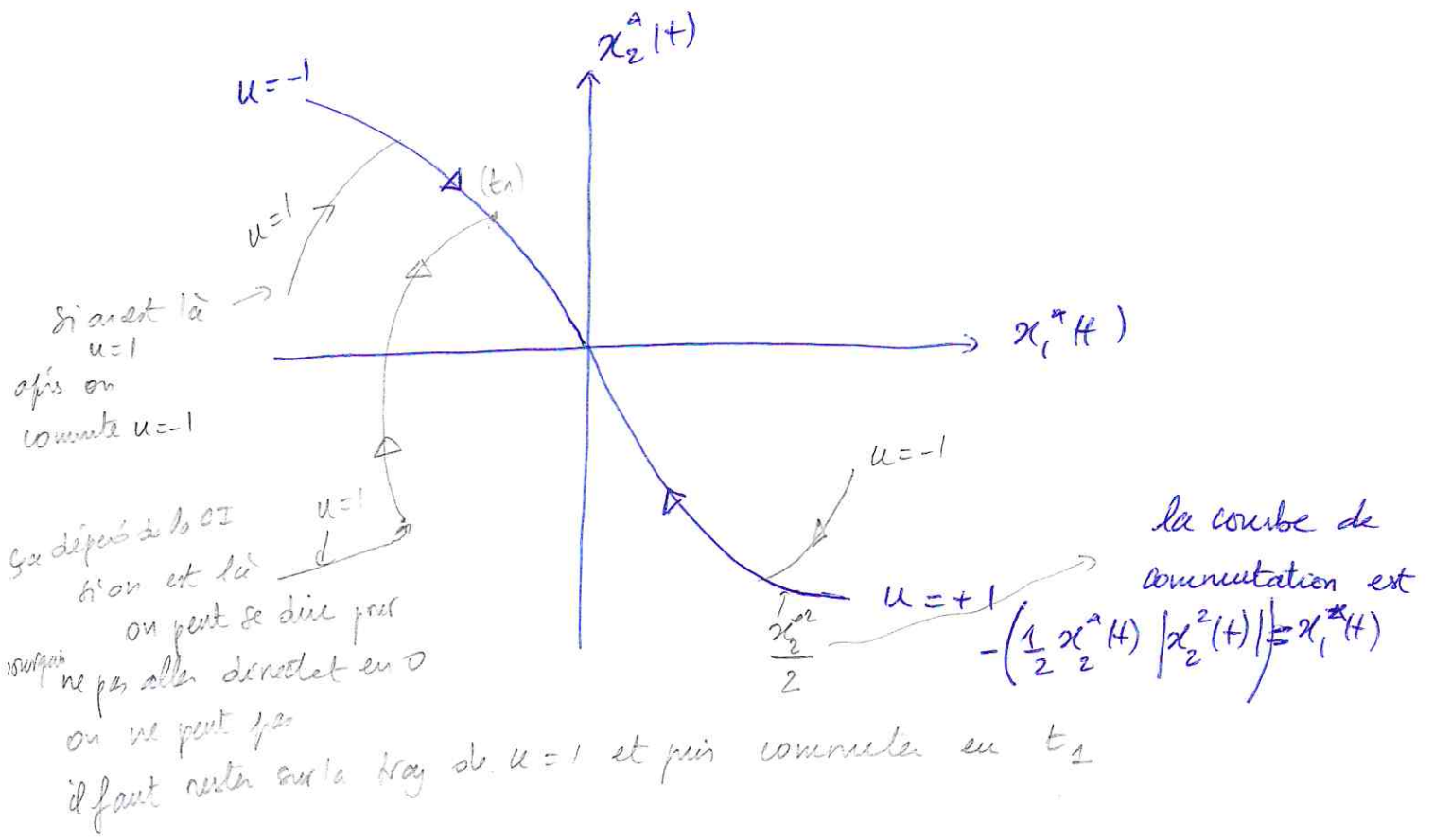
$$x_1^*(t) = -$$

qd $C_6 < 0$ $x_1^*(t)$ va croquer en des pts > 0

$$x_2^*(t) = -t + C$$

qd $t \uparrow$ $x_2^* \searrow$ donc le sens \searrow

on va s'intéresser à courbe particulière en rouge



Rq :

ça marche lq $\nabla(A) \leq 0$ sinon si $\nabla(A) > 0$ la commande ne peut pas être minimale car il faut d'abord se lever pour stabiliser la cf ensuite comb opt donc ce n'est pas en tp min.

Régulateur linéaire Quadratique

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} x^T(t_f) H x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(\underbrace{x^T(t) Q(t) x(t)}_{\substack{\text{coût} \\ \text{à cette} \\ \text{pour arriver vraiment à 0}}} + \underbrace{u^T(t) R(t) u(t)}_{\substack{\text{u très faible} \rightarrow 0}} \right) dt$$

t_f fixé

H et $Q(t)$ matrices réelles symétriques positives
 $R(t)$ " " définie positive

On suppose que la commande et les états ne sont pas contraints et $x(t_f)$ est libre

l'interprétation de ce critère

Interprétation de ce critère

maintenir x aussi proche que possible de zéro sans trop dépenser d'énergie

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R(t) u(t) + p^T(t) (A(t)x(t) + B(t)u(t))$$

C.N.O

$$\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial p}$$

$$\dot{p}^*(t) = -Q(t)x^*(t) - A^T(t)p^*(t) \quad \frac{-\partial \mathcal{H}^*}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow R(t)u^*(t) + B^T(t)p^*(t) = 0$$

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p^*(t)$$

on remplace $u^*(t)$ ds $\dot{x}^*(t)$

$$\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)p^*(t)$$

$$\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t) - B(t)K^{-1}(t)B^T(t)P^*(t)$$

$$\dot{P}^*(t) = -Q(t)x^*(t) - A^T(t)P^*(t)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{P}^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & -B(t)K^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^*(t) \\ P^*(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ P^*(t) \end{pmatrix} = \varphi(t, t_0) \begin{pmatrix} x^*(t_0) \\ P^*(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{--- ①}$$

qd A et B cste $\varphi = e^{At}$

main si A et B non cste φ est la sol d'une autre eq diff e

ex $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

$$x(t) = \varphi(t, t_0)x(t_0)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t, t_0)x(t_0) = A(t)x(t) \quad \forall x(t_0)$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}(t, t_0) = A(t)\varphi(t, t_0) \quad \text{avec } t_0 \in \mathbb{I} : \varphi(t_0, t_0) = I$$

$$\text{car } x(t_0) = \varphi(t_0, t_0)x(t_0) \Rightarrow \varphi(t_0, t_0) = I$$

mais résoudre ça c'est vraiment compliqué

mais il faut retenir que φ est la sol d'une eq diff

De --- ① on va exprimer φ en fct d'un tp t (précédent)

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ P^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t, t) & \varphi_{12}(t, t) \\ \varphi_{21}(t, t) & \varphi_{22}(t, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^*(t) \\ P^*(t) \end{pmatrix}$$

2^e ligne du tableau :

$$P^*(t) = Hx^*(t)$$

$$\text{car } \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{t=t} - P^*(t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = P^*(t)$$

$$L_1 = \frac{1}{2} x^T(t) H x(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = Hx^*(t)$$

$$x^*(t) = \varphi_{11}(t, t_0) x^*(t_0) + \varphi_{12}(t, t_0) p^*(t_0) \quad \text{--- (2)}$$

$$H x^*(t) = p^*(t) = \varphi_{21}(t, t_0) x^*(t_0) + \varphi_{22}(t, t_0) p^*(t_0) \quad \text{--- (3)}$$

de (2) et (3): $H \cdot (2) = (3)$

$$= H \varphi_{11}(t, t_0) x^*(t_0) + H \varphi_{12}(t, t_0) p^*(t_0)$$

on fait passer

$$\left(\varphi_{22}(t, t_0) - H \varphi_{12}(t, t_0) \right) p^*(t_0) = \left(H \varphi_{11}(t, t_0) - \varphi_{21}(t, t_0) \right) x^*(t_0)$$

la matrice $\varphi_{22}(t, t_0) - H \varphi_{12}(t, t_0)$ est inversible démontré par Kalman

$$\Rightarrow p^*(t_0) = \underbrace{\left(\varphi_{22}(t, t_0) - H \varphi_{12}(t, t_0) \right)^{-1} \left(H \varphi_{11}(t, t_0) - \varphi_{21}(t, t_0) \right)}_{K(t)}$$

et non $K(t, t_0)$ car ici t_0 est fixé

$$u^*(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) p^*(t) = -R^{-1}(t) B^T K(t) x^*(t)$$

c'est un retour d'état variant non constant

on peut aussi trouver $K(t)$ en résolvant l'éq de Riccati

c'est extra car au début pour résoudre le pb de Cmd opt on ne savait que l'on allait tomber sur un retour d'état

$K(t)$ vérifie aussi une équation différentielle dite de Riccati

$$p^*(t) = K(t) x^*(t) \quad (*)$$

$$\dot{p}^*(t) = \dot{K}(t) x^*(t) + K(t) \dot{x}^*(t) \stackrel{\text{par } (*)}{=} -Q(t) x^*(t) - A^T(t) p^*(t)$$

$$\Rightarrow -Q(t) x^*(t) - A^T(t) p^*(t) = \dot{K}(t) x^*(t) + K(t) (A(t) x^*(t) - B(t) R^{-1}(t) B^T p^*(t))$$

on reploie par (*)

$$\left[\dot{K}(t) + Q(t) + A^T(t) K(t) + K(t) A(t) - K(t) B(t) R^{-1}(t) B^T K(t) \right] x^*(t) = 0$$

comme $x^*(t) \neq 0$ alors

(68)

Cette eq est vraie $\forall x^*(t)$ donc

$$\Rightarrow \dot{K}(t) = -Q(t) - A^T(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$$

eq diff de Riccati

avec $K(t_f) = H$

car $\textcircled{+} p^*(t) = K(t)x^*(t) = H$
 $\Rightarrow p^*(t_f) = K(t_f)x^*(t_f) = H x^*(t_f)$
 $\Rightarrow K(t_f) = H$

à résoudre en marche arrière

Ex: il n'a pas le tp de le faire

cas de l'horizon infini $t_f \rightarrow +\infty$

Kalman a montré que si

1. le sys est complètement commandable

2. $H=0$ pas de coût final

3. A, B, R et Q : des matrices constantes

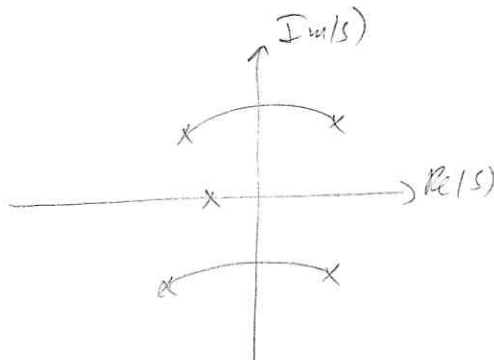
Bien sûr celle qui doit > 0
 sym
 DP---

Alors

$$K(t) \longrightarrow K = \text{cte} \Rightarrow \dot{K} = 0$$

on obtient l'eq algébrique de Riccati

$$0 = -Q - A^T K - K A + K B R^{-1} B^T K$$



de la rde
 de Kwakernak
 discussion 1. à la position
 des pôles

Rq: la commande opti LQR qd elle est appliquée on est sûr que
 le sys bouclé est stable

si R est gd ie on veut économiser l'effort alors la cond va:
 déplacer les pôles instables à leur symétrique et s'il y'a des
 pôles stables, il ne les déplace pas! (pour gagner en énergie)

si R est petit et Q gd ie on veut aller à 0 très vite alors là
 on déplace vers la gauche pour gagner (69)

Pour le tp : Brachistochrone - - -

$$g(y, \dot{y}) = \left(\frac{1 + \dot{y}^2}{1 - 20y} \right)^{1/2}$$

$$\ddot{y} = \frac{10(1 + \dot{y}^2)}{1 - 20y}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

$$\dot{x}_1 = y(x)$$
$$\dot{x}_2 = \dot{y}(x)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{10(1 + x_2^2)}{1 - 20x_1}$$

ici
c'est comme
si x est le tp

$$V_a = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$x_1(0) = y(0) = 0$$

on le
montre pas
alors on donne des CI et regarde où on tombe

$$V_y = \boxed{x_2(0) = \dot{y}(0) = ??}$$

c'est ça la difficulté de ce pb!!

on ne le connaît pas!!

≡ le pb du tir

et on modifie la CI jusqu'à tomber sur le bout
car chq CI mène vers un pt (unicité de la sol)

⇒ le pb a 2 bouts et difficile!!

qđ on a des eq diff et on n'a pas la CI c'est compliqué
et qđ en plus on veut aller à un pt exigé c'est encore plus compliqué!

Régulateur linéaire quadratique