

٩٥

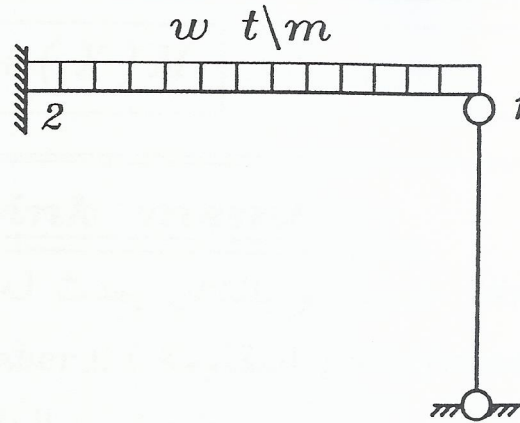
SECOND YEAR CIVIL STRUCTURAL ANALYSIS

Part (1) د / صالح د / نصر

*CONSISTENT
DEFORMATIONS
(3)*

*BEAMS WITH LINK
MEMBERS*

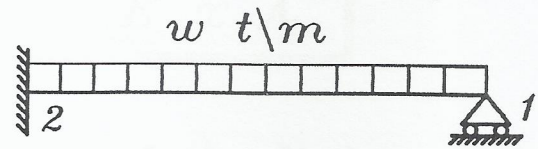
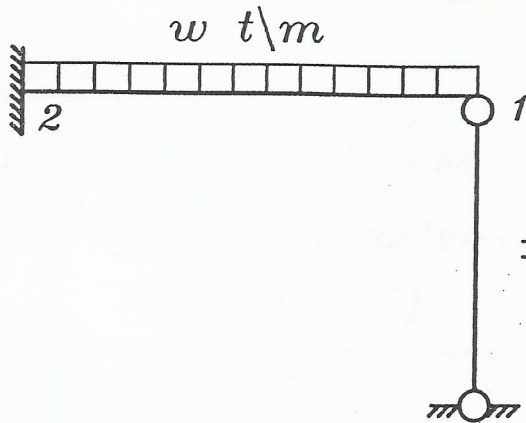
BEAMS WITH LINK MEMBERS



في حالة وجود Link member في ال Structure فيوجد لدينا حالتين :

1) Rigid Link member:

و معناه أن ال Link member قوى جداً و بالتالي لا يحدث له انضغاط أو استطالة و هذا يحدث عندما تكون ال Stiffness (المقاومة) ال member قوية جدا و سوف ندرس معنى ال Stiffness بالتفصيل فيما بعد .
و في هذه الحالة يمكننا ازالة ال Link member و وضع Roller Support بدلا منه لان ال Rigid Link member يمنع الحركة في اتجاهه تماماً .

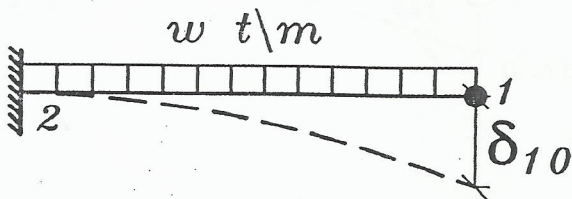


$$UN = 3 \quad \& \quad EQ = 2$$

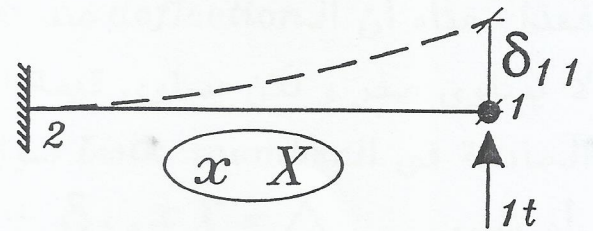
$$EQ < UN$$

Once statically indeterminate

و لحل هذه المسألة ال Once statically indeterminate :



Main system(0)



Correction system(1)

$$\delta_{10} + \delta_{11} x X = 0 \implies \text{بحل المعادلة نحصل على ال } X$$

و ال X هي Reaction ال Roller Support

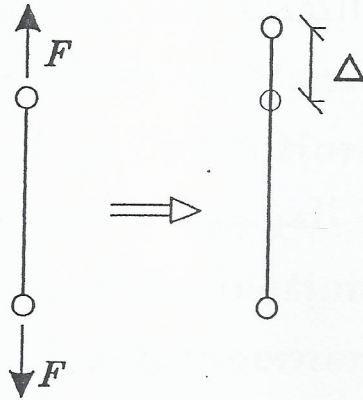
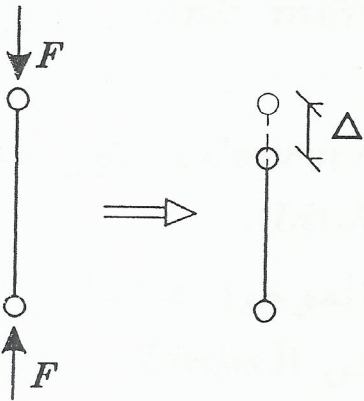
ثم نستطيع رسم ال B.M.D أو حساب ال Reactions .

$$M_{final} = M_0 + (X) M_1$$

$$R_{final} = R_0 + (X) R_1$$

2) Elastic Link member:

و معناه أن ال Link member ضعيف و بالتالى يحدث له انضغاط أو استطالة و هذا يحدث عندما تكون ال Stiffness (المقاومة) ال member ضعيفة .
و يمكننا حساب التغير فى طول ال Link member من العلاقة التالية



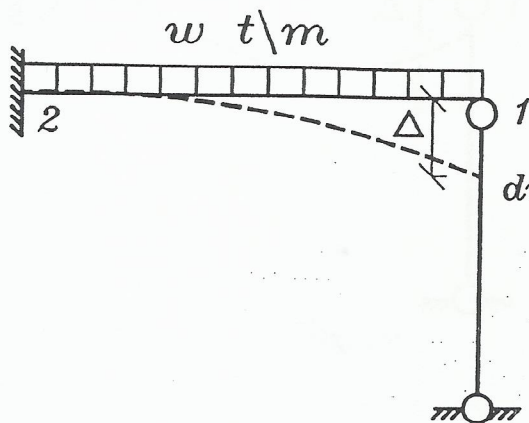
$$E = \frac{\text{Stress}}{\text{Strain}} = \frac{F/A}{\Delta/L}$$

$$\Delta = \frac{F \times L}{E \times A}$$

Where:

(A) \Rightarrow is the cross sectional area of the link member.

(Δ) \Rightarrow is the extension or shrinkage of the link due to Force (F).



فى حالة وجود Elastic link member فهذا معناه أن ال deflection عند نقطة (1)

لا يساوى صفر و لكن يساوى قيمة ال displacement الحادثة فى ال Link member سواء كانت ضغط

$$\delta_{10} + \delta_{11} \times X = \Delta \quad \text{أو شد.}$$

خطوات الحل Elastic link member فى حالة وجود

١- نقوم بتحويل المنشأ Indeterminate الى آخر determinate و Stable عن طريق ازالة ال Link members و يكون هو ال main system .

٢- نحسب ال Deflection الناتج من الغاء ال Link members و هو ال δ_{10} عند النقطة الموجود عندها ال Link members .

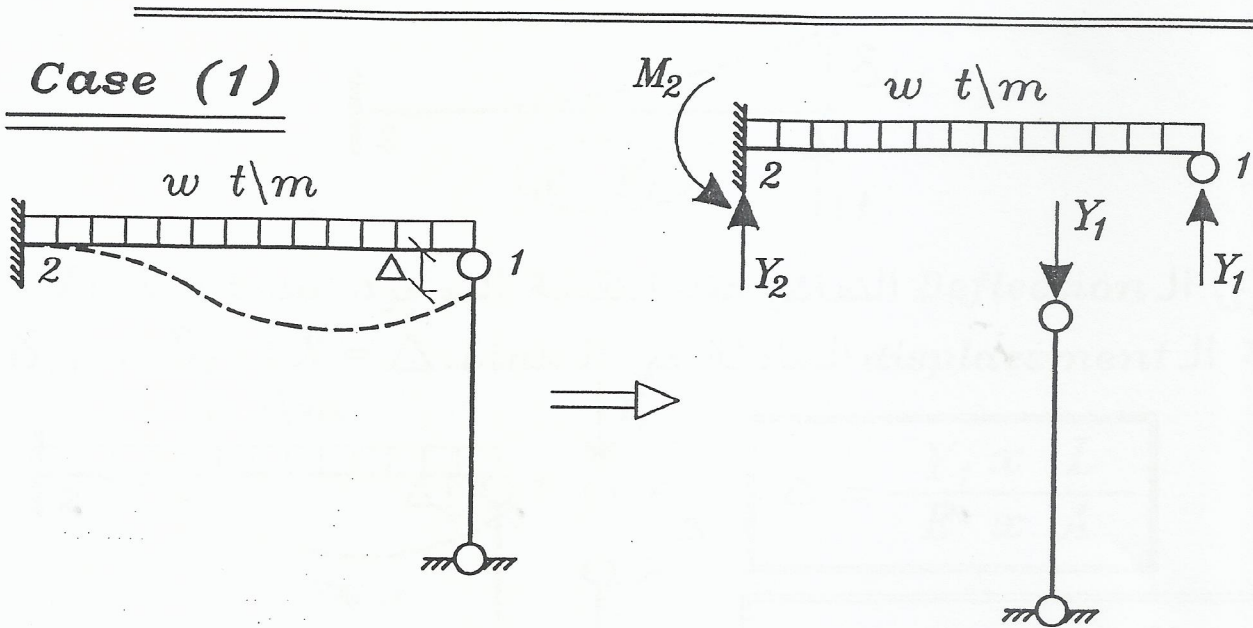
٣- نزيل كل الاحمال من ال main system و نحمله بحمل قيمته $1t$ رأسى عند النقطة الموجود عندها ال Link members و يكون هذا هذا هو ال Correction system .

٤- نحسب ال Deflection فى ال Correction system و يكون هو δ_{11} عند النقطة الموجود عندها ال Link members .

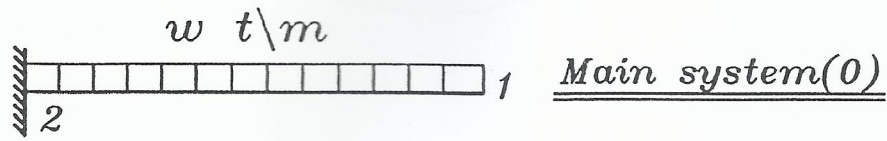
٥- نساوى ال Deflection النهائى عند النقطة الموجود عندها ال Link بقيمة ال displacement الرأسية الحادثة فى ال Links .

$$\delta_{10} + \delta_{11} x X = \Delta$$

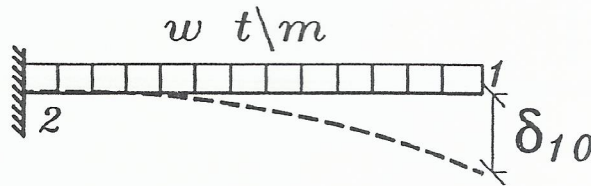
و لكن توجد Cases ستتغير معها هذه المعادلة كما سنرى



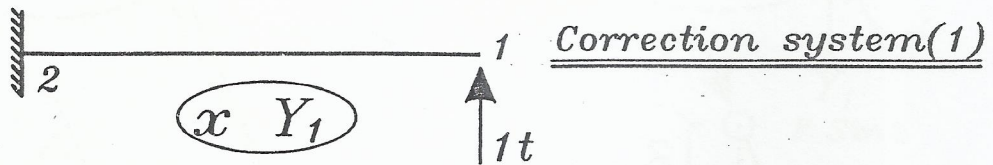
١- نقوم بتحويل المنشأ Indeterminate الى آخر determinate و Stable عن طريق ازالة ال Link members و يكون هو ال main system.



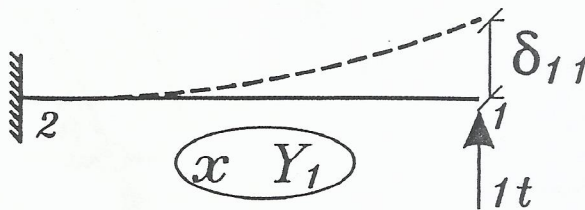
٢- نحسب ال Deflection الناتج من الغاء ال Link members و هو ال δ_{10} .



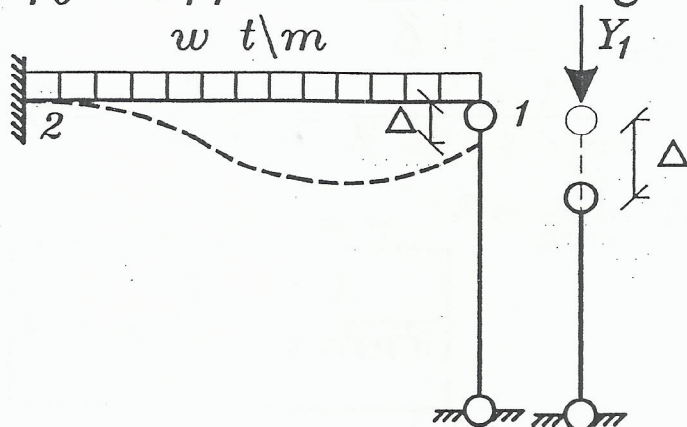
٣- نزيل كل الاحمال من ال main system و نحمله بحمل قيمته $1t$ -
 في نفس اتجاه ال Reaction و يكون هذا هو ال Correction system.



٤- نحسب ال Deflection في ال Correction system و يكون هو δ_{11} .



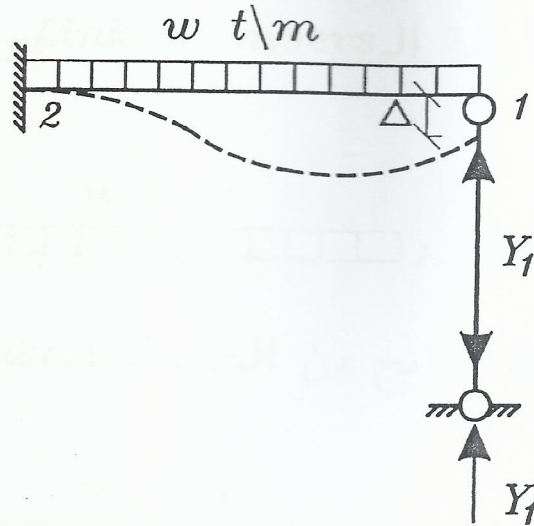
٥- نساوي ال Deflection النهائي عند النقطة الموجود عندها ال Link بقيمة ال displacement ال حادثه في ال Link. $\delta_{10} + \delta_{11} x X = \Delta$.



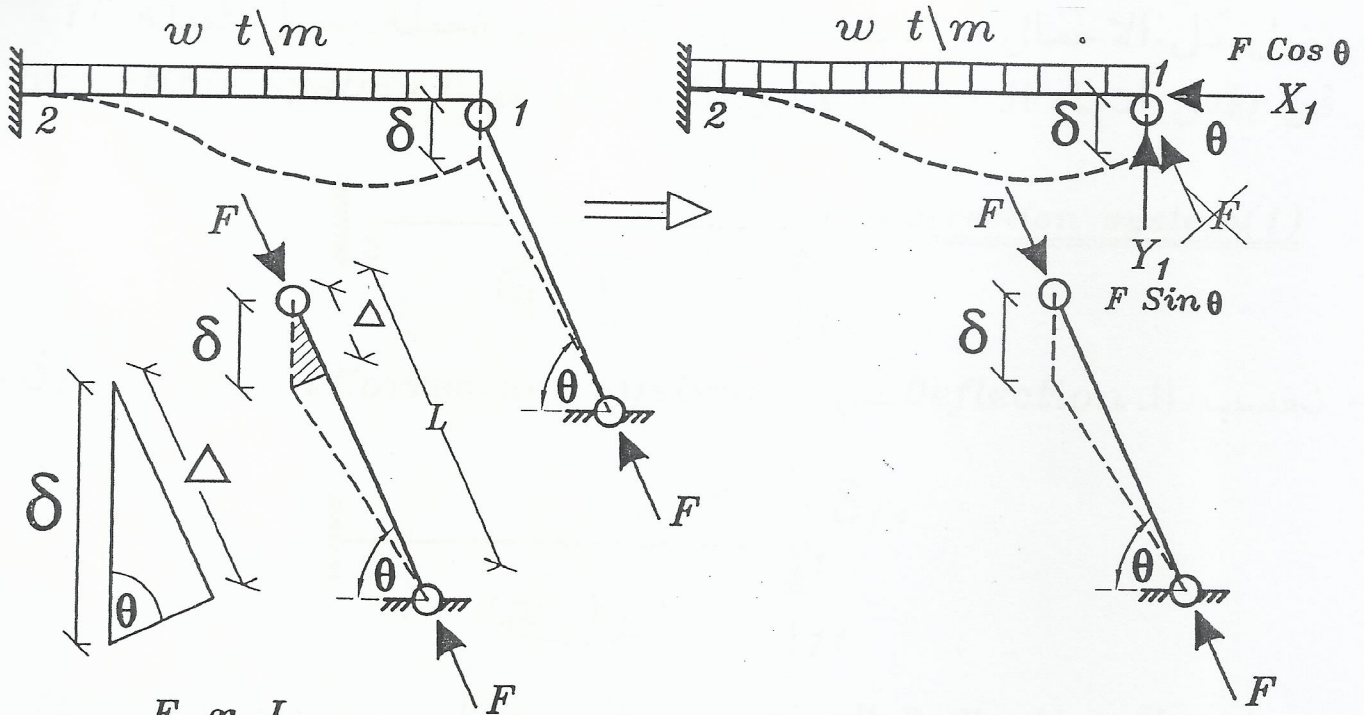
$$\Delta = \frac{Y_1 x L}{E x A}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} x Y_1 = \frac{Y_1 x L}{E x A}$$

و بحل هذه المعادلة نحصل على قيمة الـ Y_1 و بذلك نستطيع رسم الـ $B.M.D$.



Case (2)



$$\Delta = \frac{F \times L}{E \times A}$$

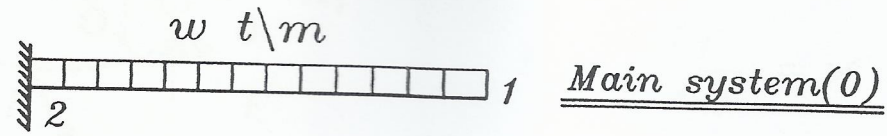
و من المثلث المتشابه يمكن ايجاد علاقة بين الـ δ و الـ Δ

$$\delta = \frac{\Delta}{\sin \theta} = \frac{F \times L}{E \times A \times \sin \theta}$$

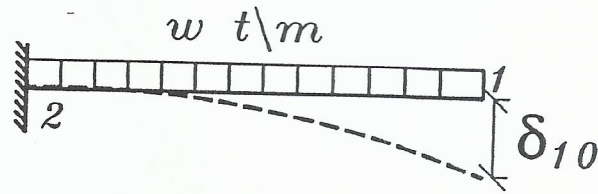
و بالتعويض بقيمة الـ $Y_1 = F \sin \theta$ أى أن $F = \frac{Y_1}{\sin \theta}$

$$\delta = \frac{Y_1 \times L}{E \times A \times \sin^2 \theta}$$

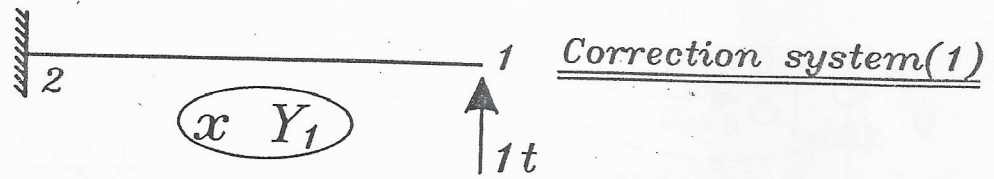
١- نقوم بتحويل المنشأ Indeterminate الى آخر determinate و Stable عن طريق ازالة ال Link members و يكون هو ال main system.



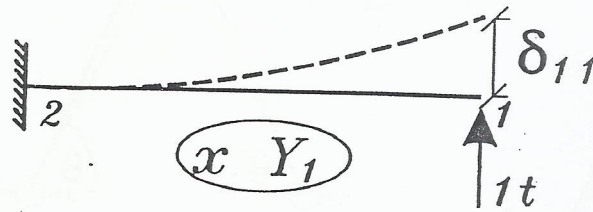
٢- نحسب ال Deflection الناتج من الغاء ال Link members و هو ال δ_{10} .



٣- نزيل كل الاحمال من ال main system و نحمله بحمل قيمته $1t$ في نفس اتجاه ال Reaction و يكون هذا هو ال Correction system.



٤- نحسب ال Deflection في ال Correction system و يكون هو δ_{11} .

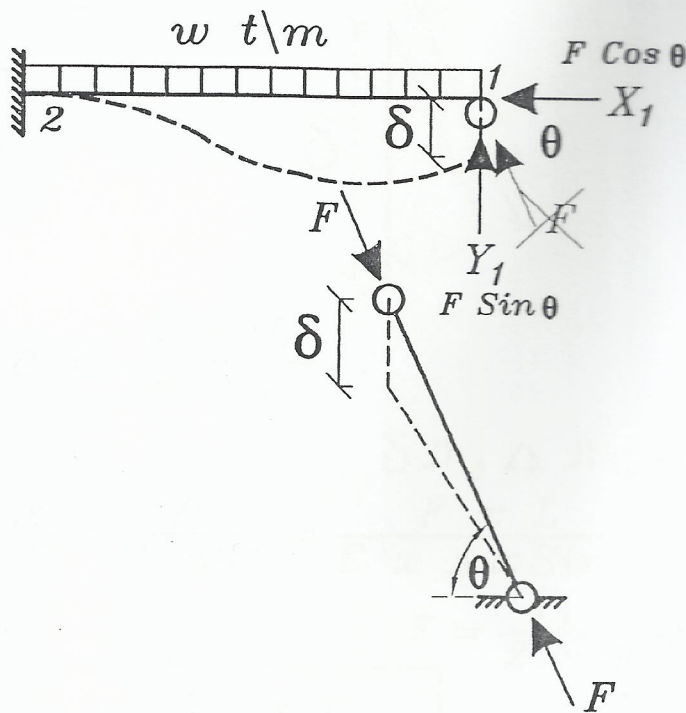


٥- نساوي ال Deflection النهائي عند النقطة الموجود عندها ال Link بقيمة ال displacement الحادثة نتيجة ال Link.

$$\delta = \frac{Y_1 \cdot x \cdot L}{E \cdot x \cdot A \cdot \sin^2 \theta}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot x \cdot Y_1 = \frac{Y_1 \cdot x \cdot L}{E \cdot x \cdot A \cdot \sin^2 \theta}$$

و بحل هذه المعادلة نحصل على قيمة الـ Y_1 و بذلك نستطيع رسم
 الـ B.M.D

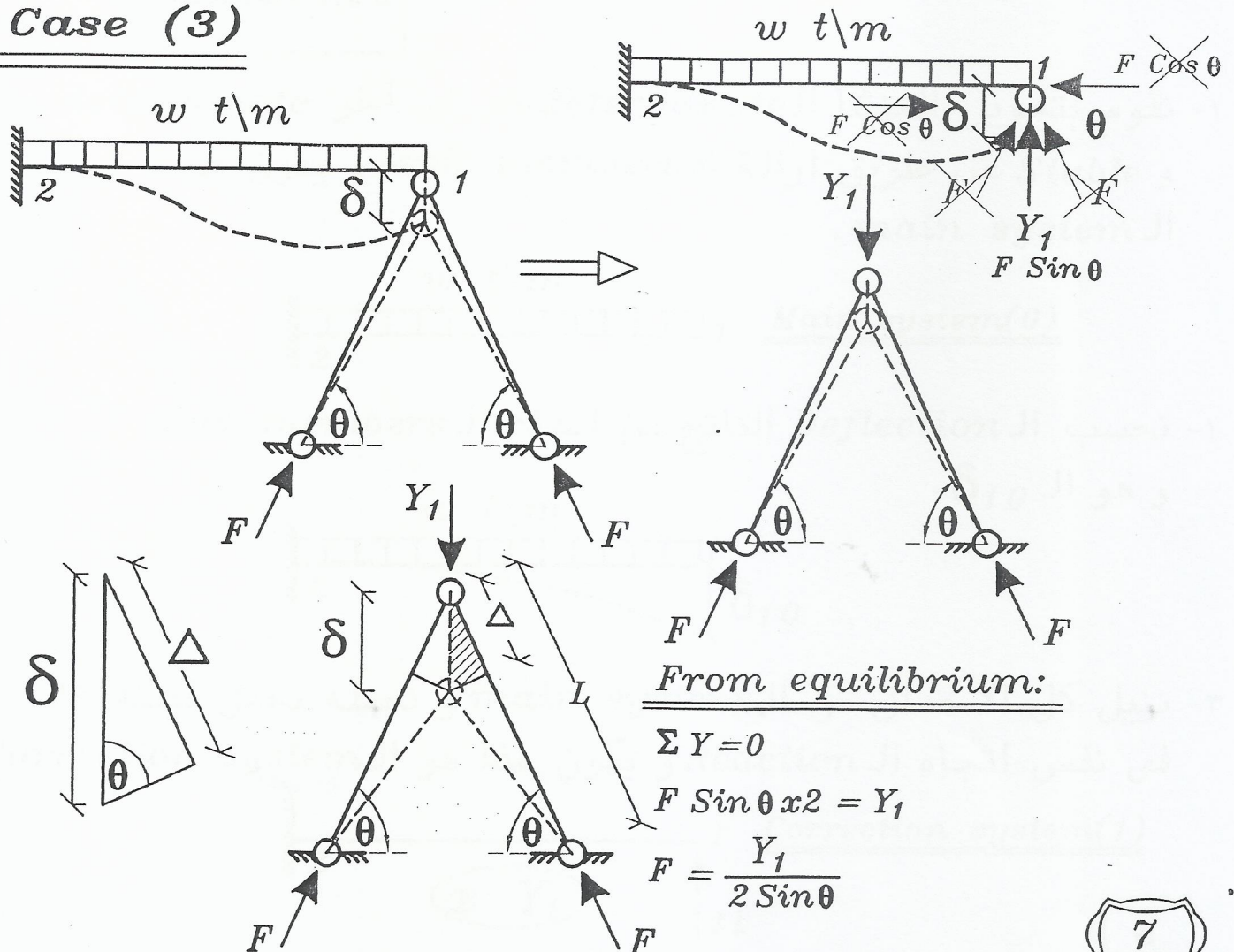


$$Y_1 = \checkmark$$

$$F = \frac{Y_1}{\sin \theta} = \checkmark$$

$$X_1 = F \cos \theta = \checkmark$$

Case (3)

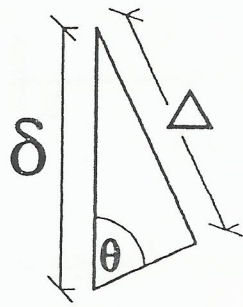


From equilibrium:

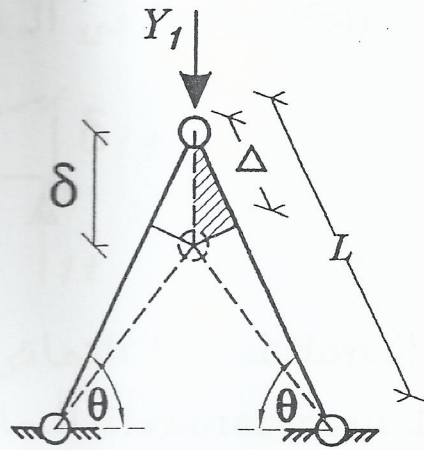
$$\Sigma Y = 0$$

$$F \sin \theta \times 2 = Y_1$$

$$F = \frac{Y_1}{2 \sin \theta}$$



$$\Delta = \frac{F \times L}{E \times A}$$



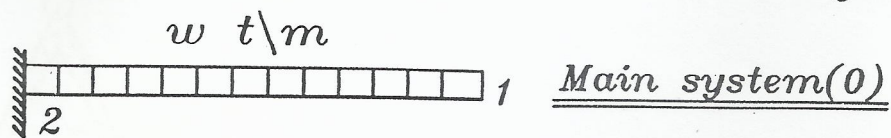
و من المثلث المتشابه يمكن إيجاد علاقة بين Δ و δ

$$\delta = \frac{\Delta}{\sin \theta} = \frac{F \times L}{E \times A \times \sin \theta}$$

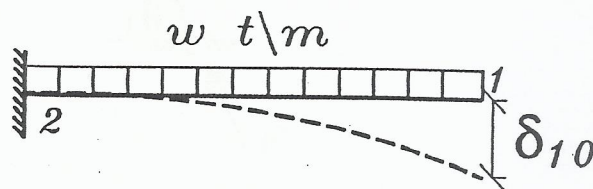
و بالتعويض بقيمة $Y_1 = F \sin \theta$ أي أن $F = \frac{Y_1}{2 \sin \theta}$

$$\delta = \frac{Y_1 \times L}{2 \times E \times A \times \sin^2 \theta}$$

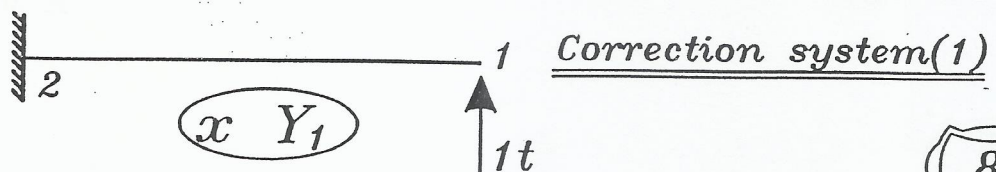
١- نقوم بتحويل المنشأ Indeterminate الى آخر determinate و Stable عن طريق ازالة Link members و يكون هو ال main system.



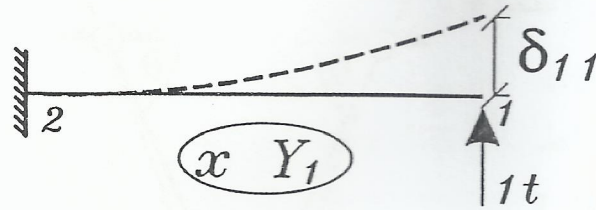
٢- نحسب ال Deflection الناتج من الغاء ال Link members و هو δ_{10} .



٣- نزيل كل الاحمال من ال main system و نحمله بحمل قيمته $1t$ في نفس اتجاه ال Reaction و يكون هذا هو ال Correction system



٤- نحسب ال Deflection فى ال Correction system و يكون هو δ_{11}

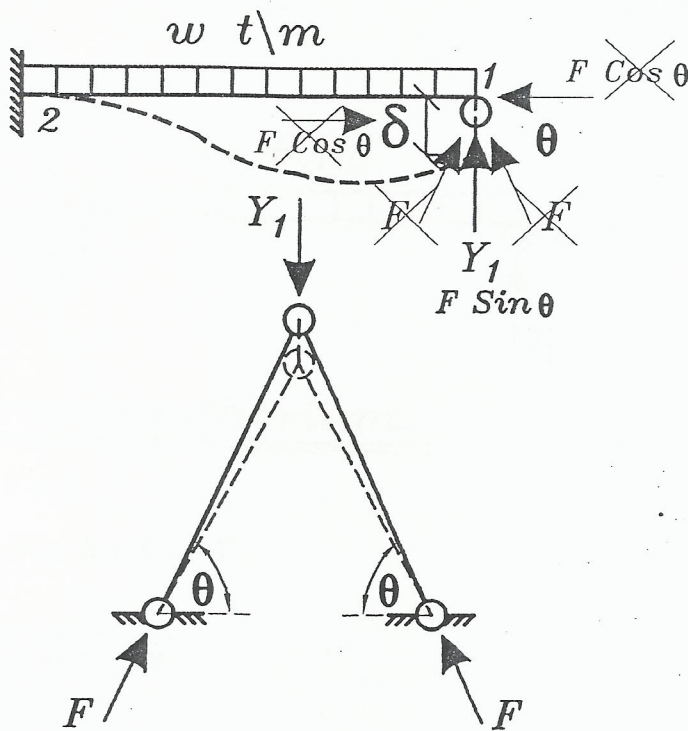


٥- نساوى ال Deflection النهائى عند النقطة الموجود عندها ال Link بقيمة ال displacement الحادثة نتيجة ال Links.

$$\delta = \frac{Y_1 \times L}{2xE \times A \times \sin^2 \theta}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \times Y_1 = \frac{Y_1 \times L}{2xE \times A \times \sin^2 \theta}$$

و بحل هذه المعادلة نحصل على قيمة ال Y_1 و بذلك نستطيع رسم ال B.M.D.

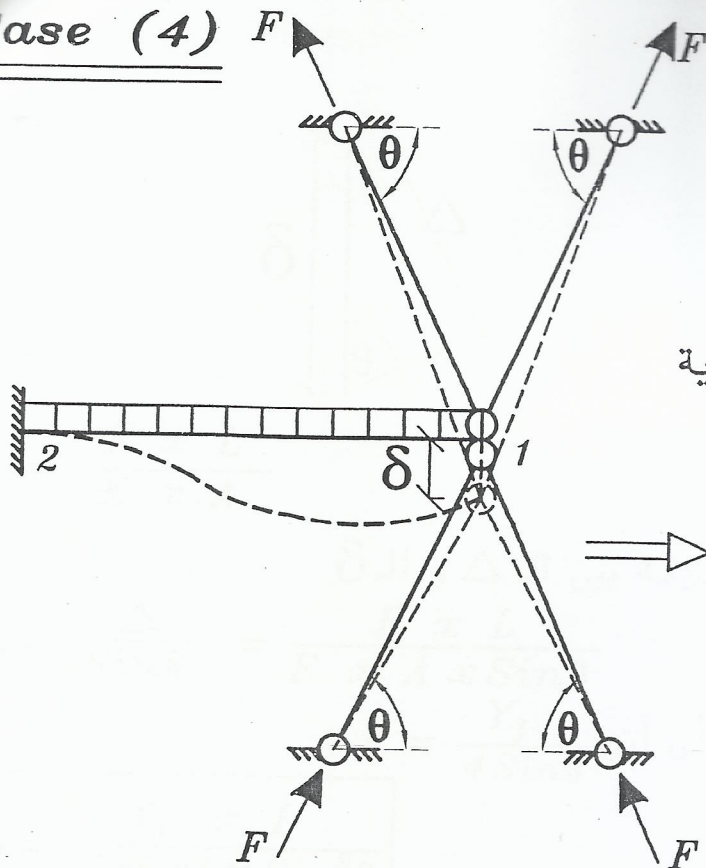


$$Y_1 = \checkmark$$

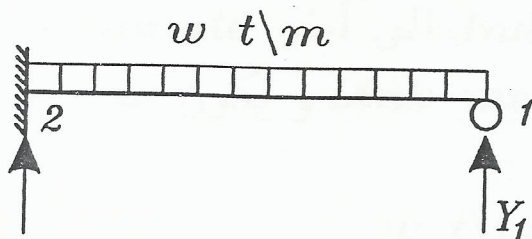
$$F = \frac{Y_1}{2 \sin \theta} = \checkmark$$

ولكن هذه الطريقة لا تصلح الا فى حالة ثبات θ & A & E و فى حالة عدم ثباتهم سنحلها بطريقة أخرى سندرسها فيما بعد

Case (4)



نتيجة الاحمال الموجودة على الكمرة
فان ال Deflection الكمرة يكون
لاسفل و بالتالى يحدث انضغاط
فى ال Link members السفلية
و شد فى ال Link members العلوية

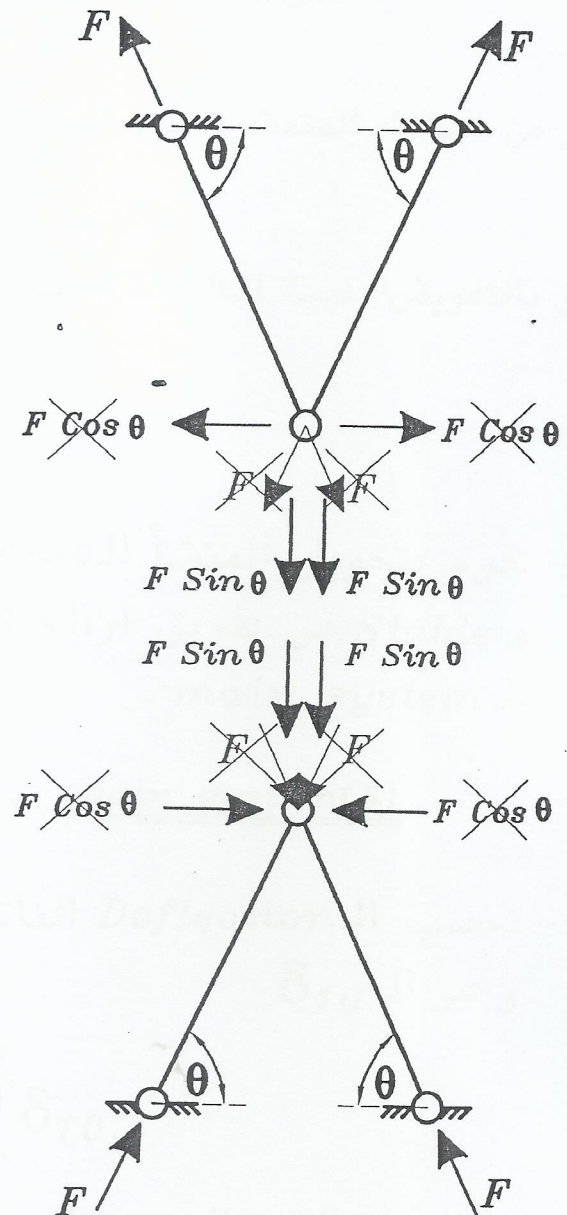


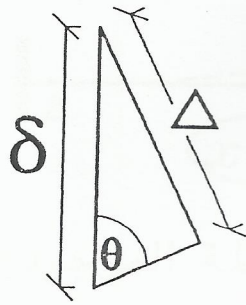
From equilibrium:

$$\Sigma Y = 0$$

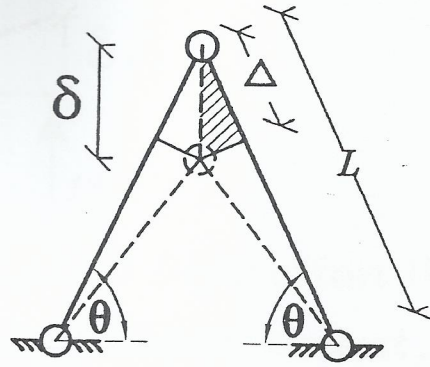
$$F \sin \theta \times 4 = Y_1$$

$$F = \frac{Y_1}{4 \sin \theta}$$





$$\Delta = \frac{F \times L}{E \times A}$$



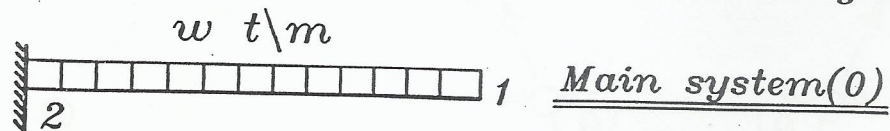
و من المثلث المنتشر يمكن ايجاد علاقة بين Δ و δ

$$\delta = \frac{\Delta}{\sin \theta} = \frac{F \times L}{E \times A \times \sin \theta}$$

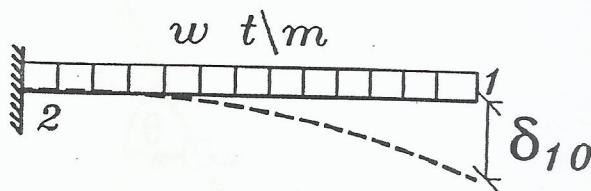
و بالتعويض بقيمة $Y_1 = F \sin \theta$ أى أن $F = \frac{Y_1}{4 \sin \theta}$

$$\delta = \frac{Y_1 \times L}{4 \times E \times A \times \sin^2 \theta}$$

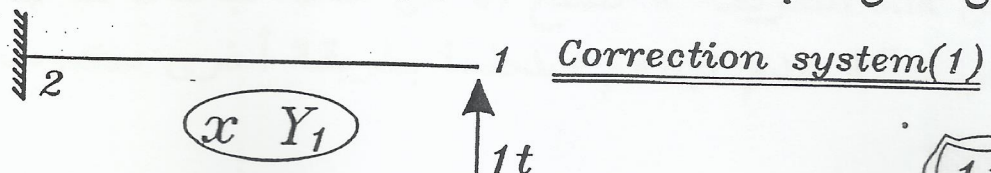
١- نقوم بتحويل المنشأ Indeterminate الى آخر determinate و Stable عن طريق ازالة Link members و يكون هو main system.



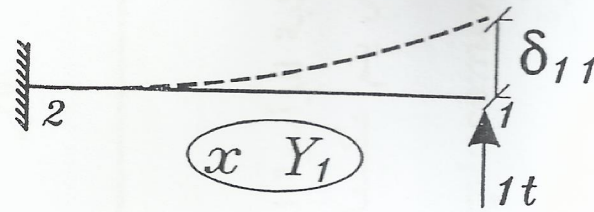
٢- نحسب ال Deflection الناتج من الغاء ال Link members و هو δ_{10} .



٣- نزيل كل الاحمال من ال main system و نحمله بحمل قيمته $1t$ فى نفس اتجاه ال Reaction و يكون هذا هو ال Correction system



٤- نحسب ال Deflection فى ال Correction system و يكون هو δ_{11}

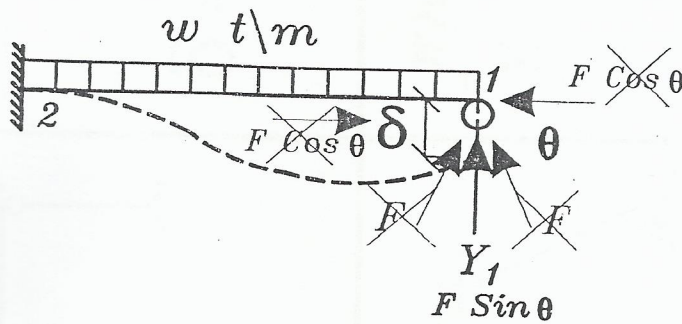


٥- نساوى ال Deflection النهائى عند النقطة الموجود عندها ال Link بقيمة ال displacement الحادثة نتيجة ال Links.

$$\delta = \frac{Y_1 \cdot x \cdot L}{4xExA \cdot \sin^2 \theta}$$

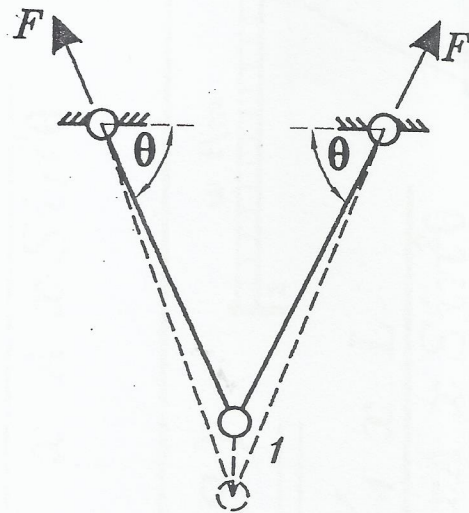
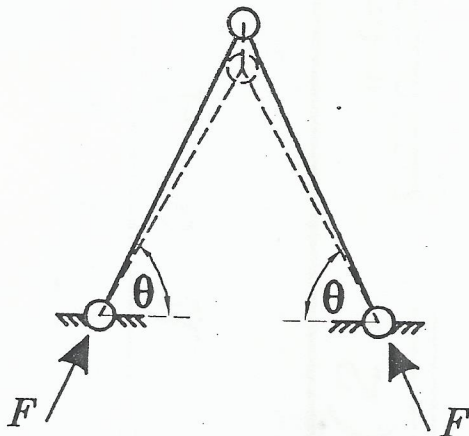
$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot Y_1 = \frac{Y_1 \cdot x \cdot L}{4xExA \cdot \sin^2 \theta}$$

و بحل هذه المعادلة نحصل على قيمة ال Y_1 و بذلك نستطيع رسم ال B.M.D.



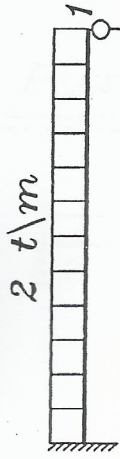
$$Y_1 = \checkmark$$

$$F = \frac{Y_1}{4 \sin \theta} = \checkmark$$



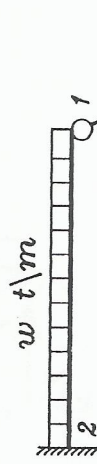
ولكن هذه الطريقة لا تصلح الا فى حالة ثبات θ & A & E و فى حالة عدم ثباتهم سنحلها بطريقة أخرى سندرسها فيما بعد

Case (1)



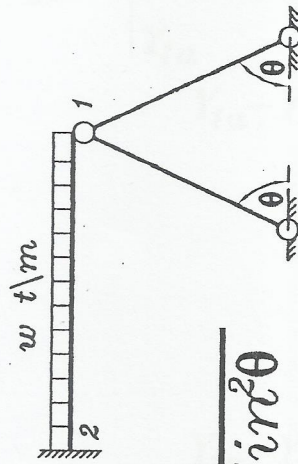
$$\delta = \frac{Y_1 x L}{E x A}$$

Case (2)



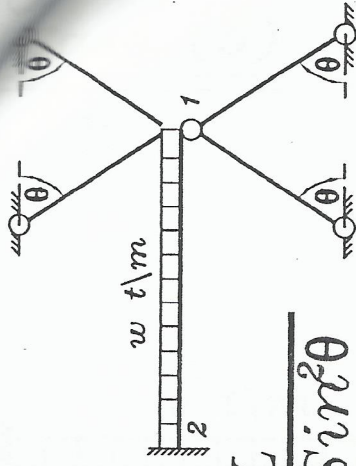
$$\delta = \frac{Y_1 x L}{E x A \sin^2 \theta}$$

Case (3)



$$\delta = \frac{Y_1 x L}{2E x A \sin^2 \theta}$$

Case (4)



$$\delta = \frac{Y_1 x L}{4E x A \sin^2 \theta}$$

Where

$Y_1 \rightarrow$ المركبة الرأسية لـ Forces في ال Links
و التي يتم عكسها على الكرة

$\delta \rightarrow$ Displacement الرأسية الحادثة في الكرة

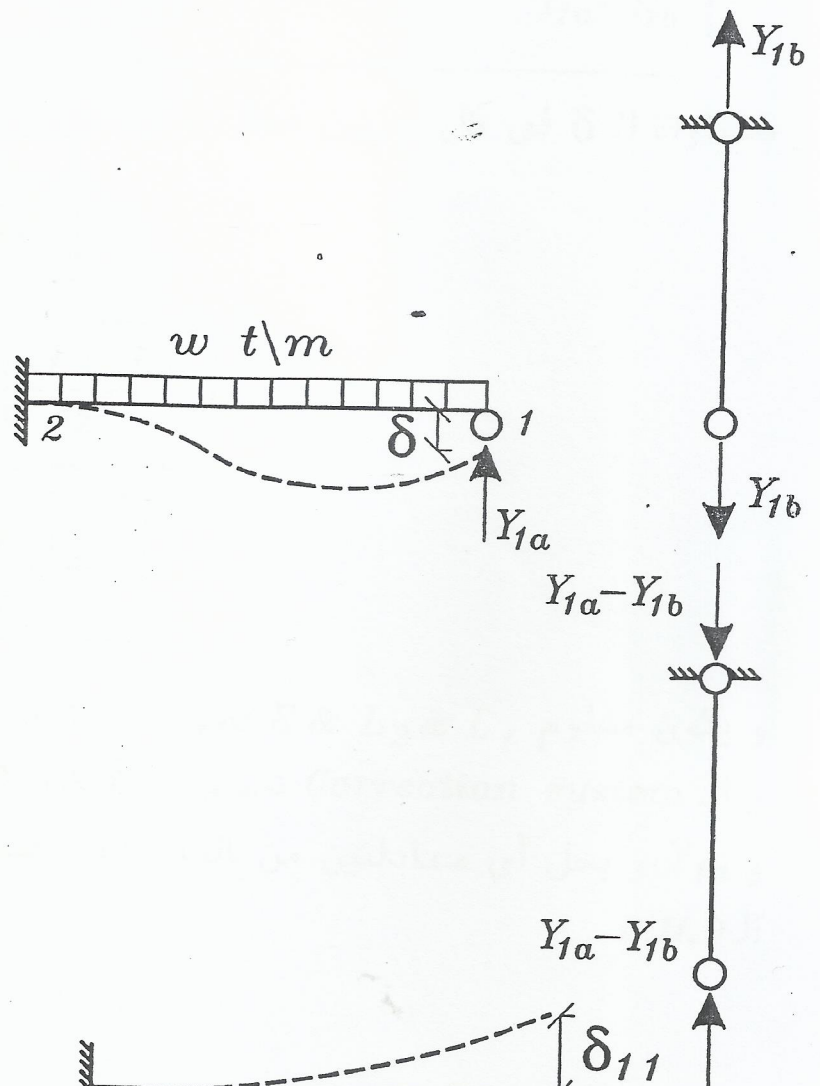
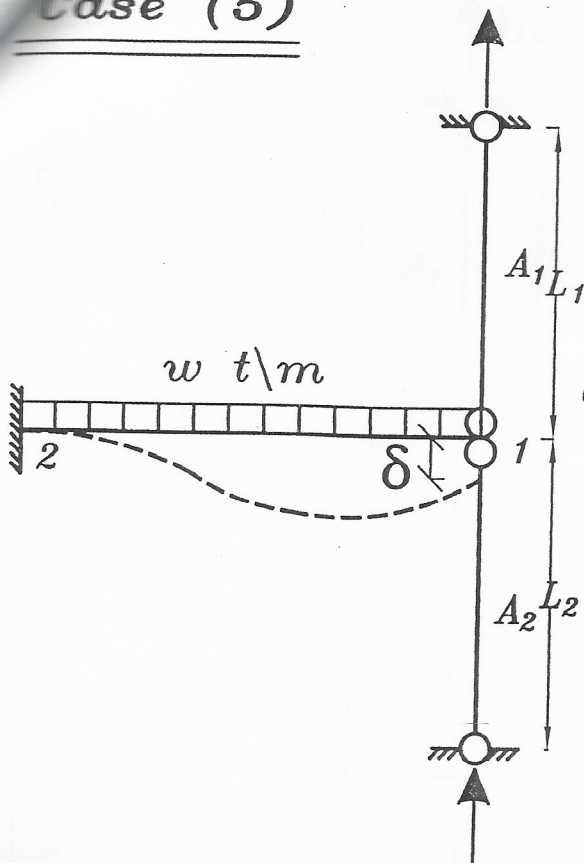
$(A) \rightarrow$ The cross sectional area of the link member.

$(E) \rightarrow$ Modulus of elasticity

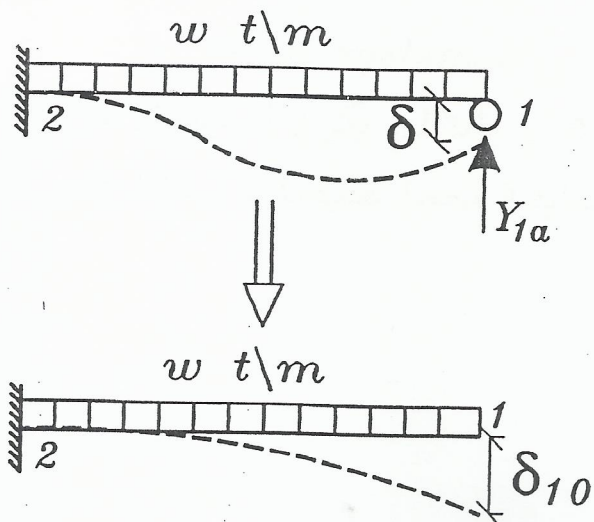
Case (5)

١- فى هذه الحالة نقوم بتقسيم المنشأ الى ٣ أجزاء (الكمرة و كل *Link* على حدة)

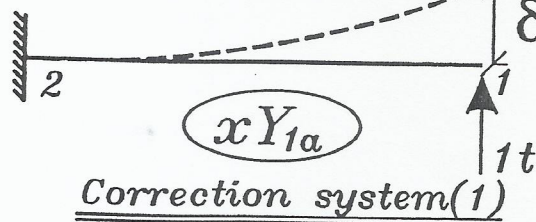
٢- سوف نقوم بحساب ال *deflection* الناتج من كل جزء على حده ثم نساوى ال *deflection* فى كل اثنين منهم للحصول المعادلات



Part (1)



Main system(0)



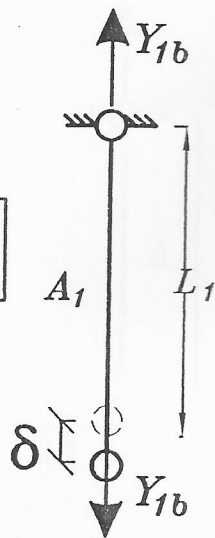
Correction system(1)

$$\delta_{10} + \delta_{11} x Y_{1a} = \delta \Rightarrow EQ.1$$

Part (2)

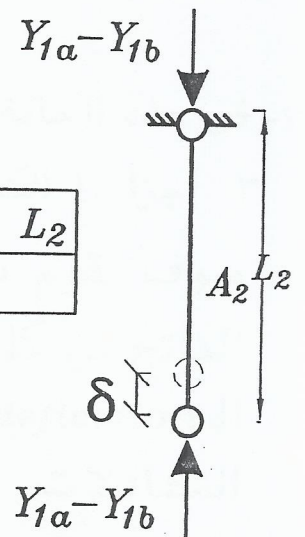
$$\delta = \frac{Y_{1b} \times L_1}{E \times A_1}$$

EQ.2



$$\delta = \frac{(Y_{1a} - Y_{1b}) \times L_2}{E \times A_2}$$

EQ.3



و بمساواة δ في كل جزئين معا

$$\delta_{10} + \delta_{11} \times Y_{1a} = \frac{Y_{1b} \times L_1}{E \times A_1}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \times Y_{1a} = \frac{(Y_{1a} - Y_{1b}) \times L_2}{E \times A_2}$$

$$\frac{Y_{1b} \times L_1}{E \times A_1} = \frac{(Y_{1a} - Y_{1b}) \times L_2}{E \times A_2}$$

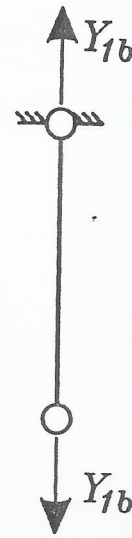
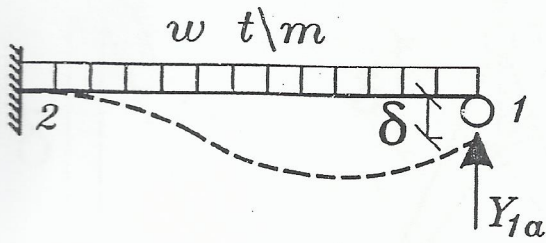
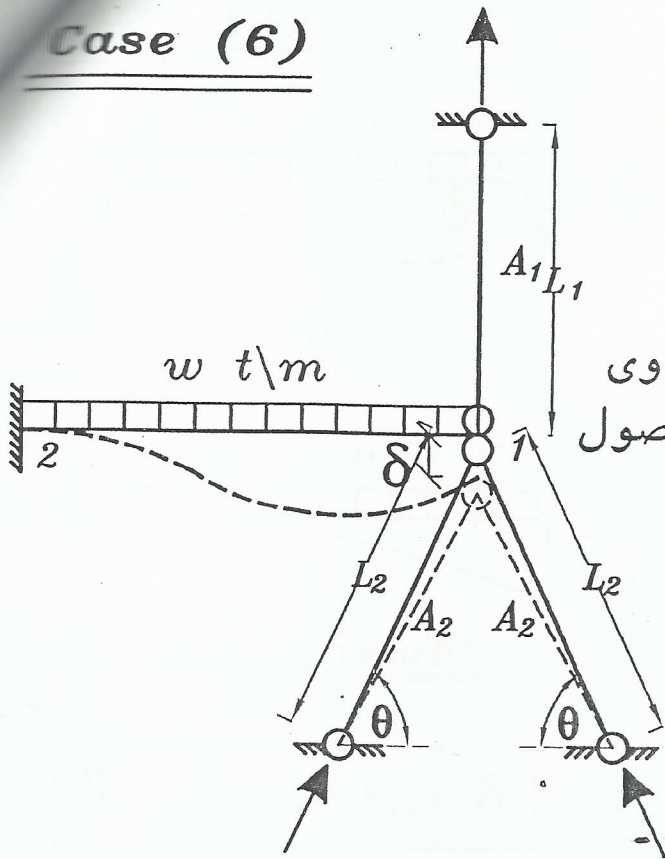
و يكون معلوم L_1 & L_2 & E & A_1 & A_2 و من ال main system و ال Correction system نحسب δ_{10} & δ_{11} و بالتالي يكون المجهول هو Y_{1b} و Y_{1a} و بحل أى معادلتين من المعادلات السابقة نحصل عليهما و يمكننا وسم ال B.M.D ال

Case (6)

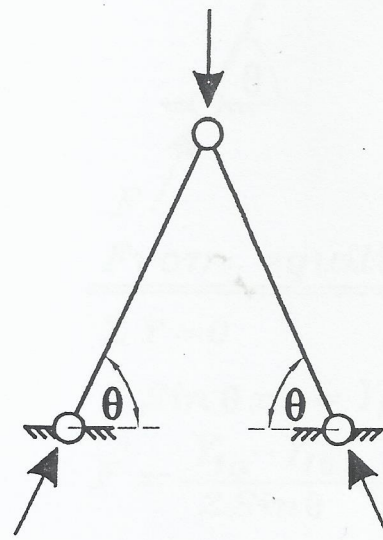
١- فى هذه الحالة نقوم بتقسيم المنشأ الى ٣ أجزاء (الكمرة و كل Link على حدة)

٢- سوف نقوم بحساب ال deflection

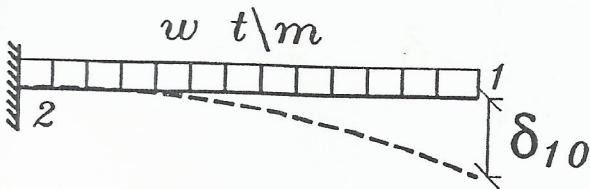
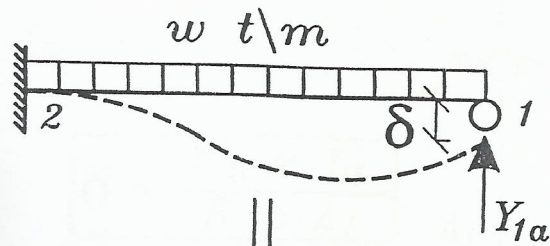
الناتج من كل جزء على حده ثم نساوى ال deflection فى كل اثنين منهم للحصول المعادلات



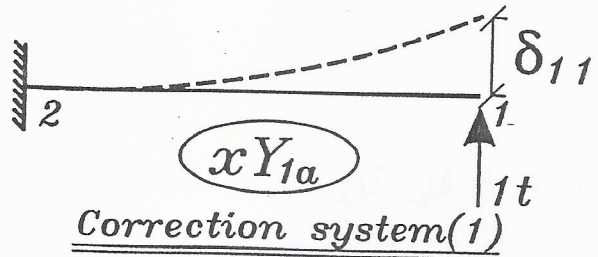
$$Y_{1a} - Y_{1b}$$



Part (1)



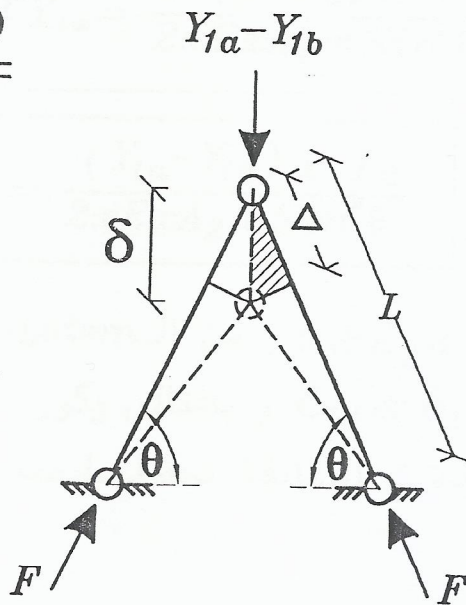
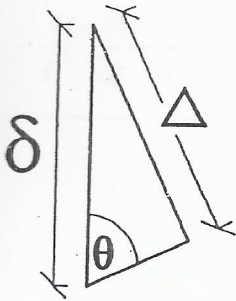
Main system(0)



Correction system(1)

$$\delta_{10} + \delta_{11} x Y_{1a} = \delta \Rightarrow \text{EQ.1}$$

Part (2)

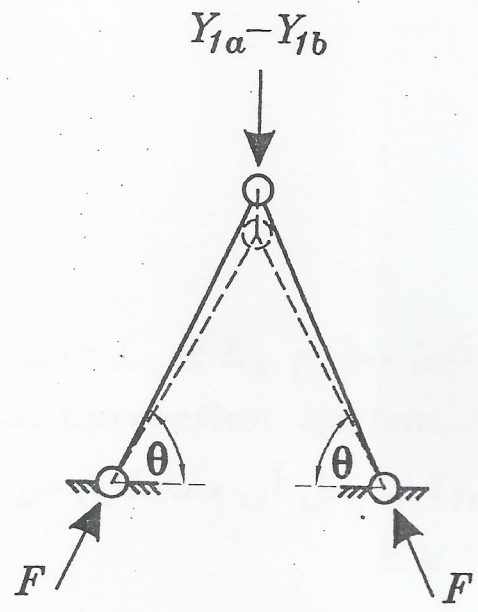


$$\Delta = \frac{F \times L}{E \times A}$$

$$\delta = \frac{\Delta}{\sin \theta} = \frac{F \times L}{E \times A \times \sin \theta}$$

$$F = \frac{(Y_{1a} - Y_{1b})}{2 \sin \theta}$$

$$\delta = \frac{(Y_{1a} - Y_{1b}) \times L}{2 \times E \times A \times \sin^2 \theta}$$



From equilibrium:

$$\Sigma Y = 0$$

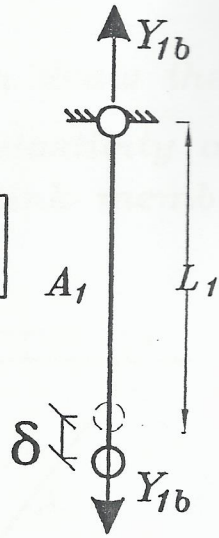
$$F \sin \theta \times 2 = Y_{1a} - Y_{1b}$$

$$F = \frac{Y_{1a} - Y_{1b}}{2 \sin \theta}$$

Part (3)

$$\delta = \frac{Y_{1b} \times L_1}{E \times A_1}$$

EQ.2



و بمساواة δ في كل جزئين معا

$$\delta_{10} + \delta_{11} \times Y_{1a} = \frac{Y_{1b} \times L_1}{E \times A_1}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \times Y_{1a} = \frac{(Y_{1a} - Y_{1b}) \times L_2}{2 \times E \times A_2 \times \sin^2 \theta}$$

$$\frac{Y_{1b} \times L_1}{E \times A_1} = \frac{(Y_{1a} - Y_{1b}) \times L_2}{2 \times E \times A_2 \times \sin^2 \theta}$$

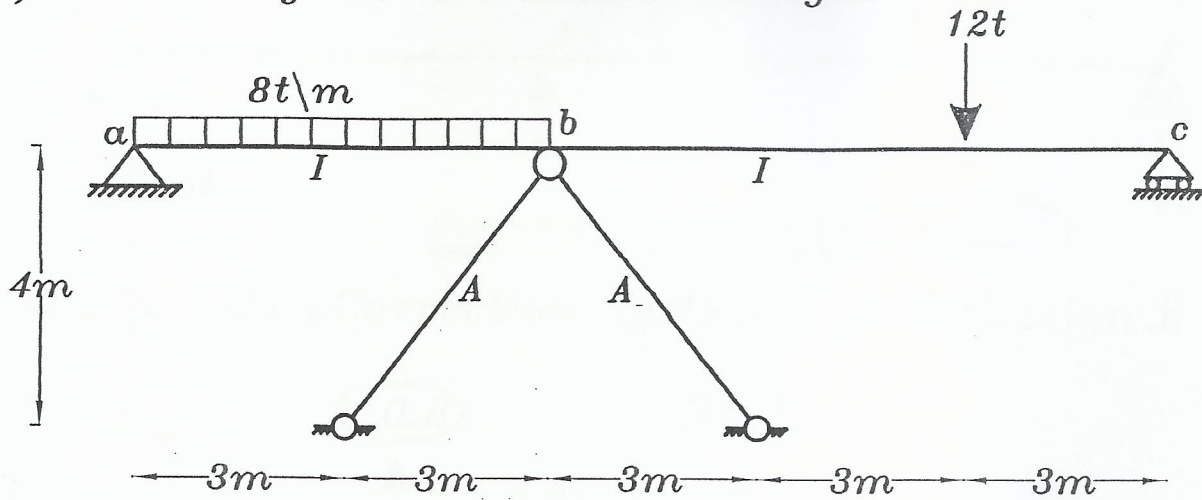
و يكون معلوم L_1 & L_2 & E & A_1 & A_2 & θ و من ال main system و ال Correction system نحسب δ_{10} & δ_{11} و بالتالي يكون المجهول هو Y_{1b} و Y_{1a} و بحل أى معادلتين من المعادلات السابقة نحصل عليهما و يمكننا وسم

B.M.D ال

Example:

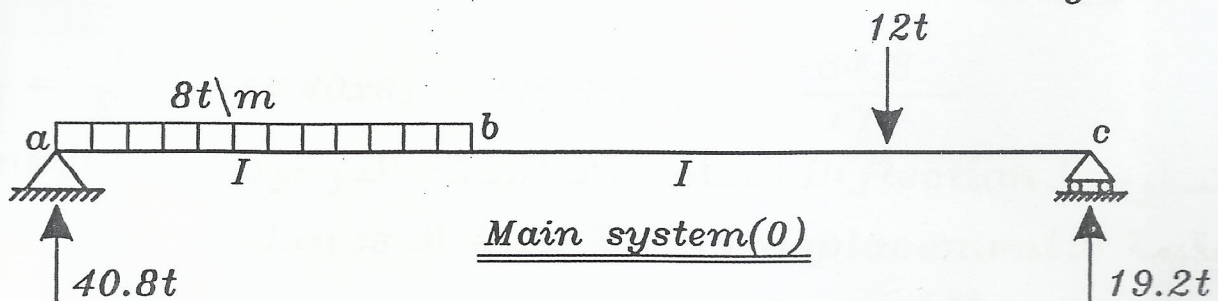
For the shown beam draw the B.M.D .

- 1) Considering the elasticity of the link member ($EI=5EA$).
- 2) Considering the link member is rigid.

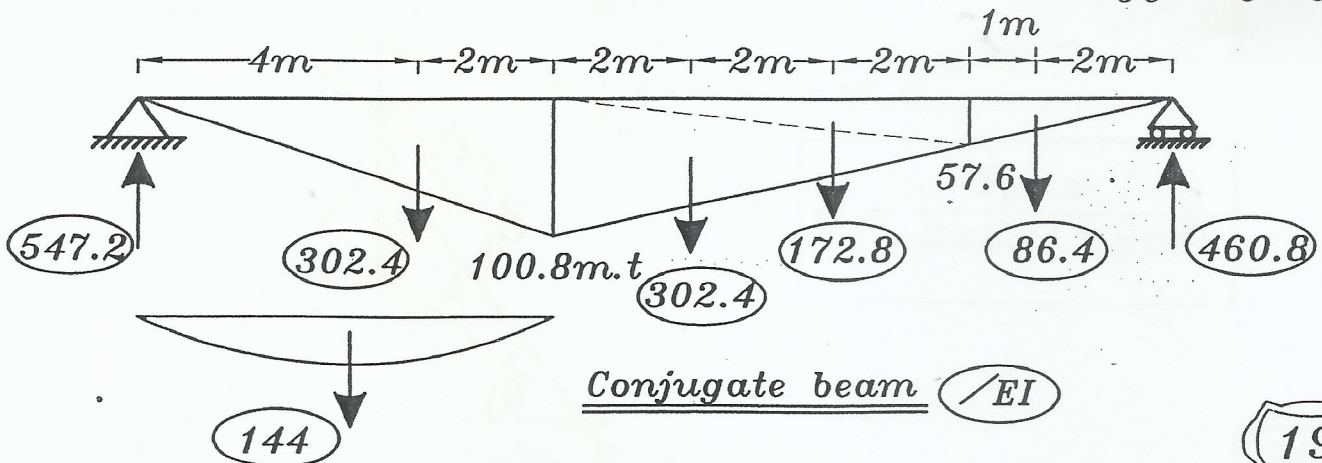


- 1) Considering the elasticity of the link member ($EI=5EA$).

١- نقوم بتحويل المنشأ Indeterminate الى آخر determinate و Stable عن طريق ازالة ال Link members و يكون هو ال main system .

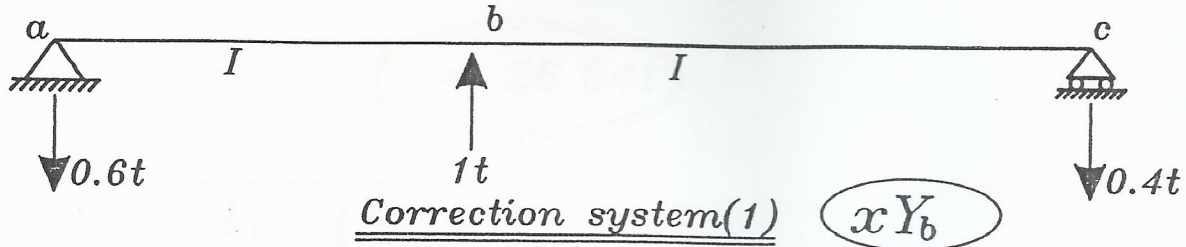


٢- نحسب ال Deflection الناتج من الغاء ال Link members و هو ال δ_{b0} .

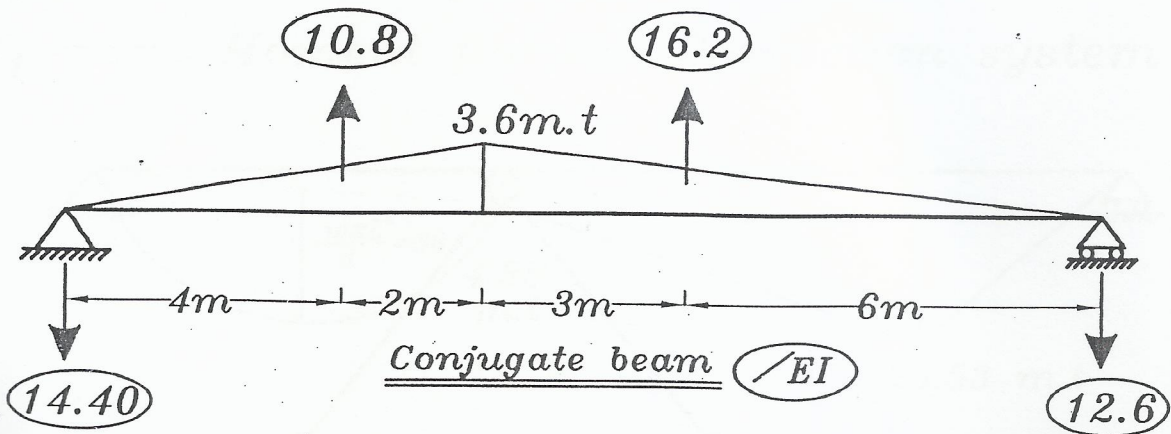


$$\delta_{b0} = \frac{1}{EI} [(547.2 \times 6) - (144 \times 3) - (302.4 \times 2)] = \frac{2246.4}{EI}$$

٣- تنزيل كل الاحمال من ال main system و نحمله بحمل قيمته 1t في نفس اتجاه ال Reaction و يكون هذا هو ال Correction system

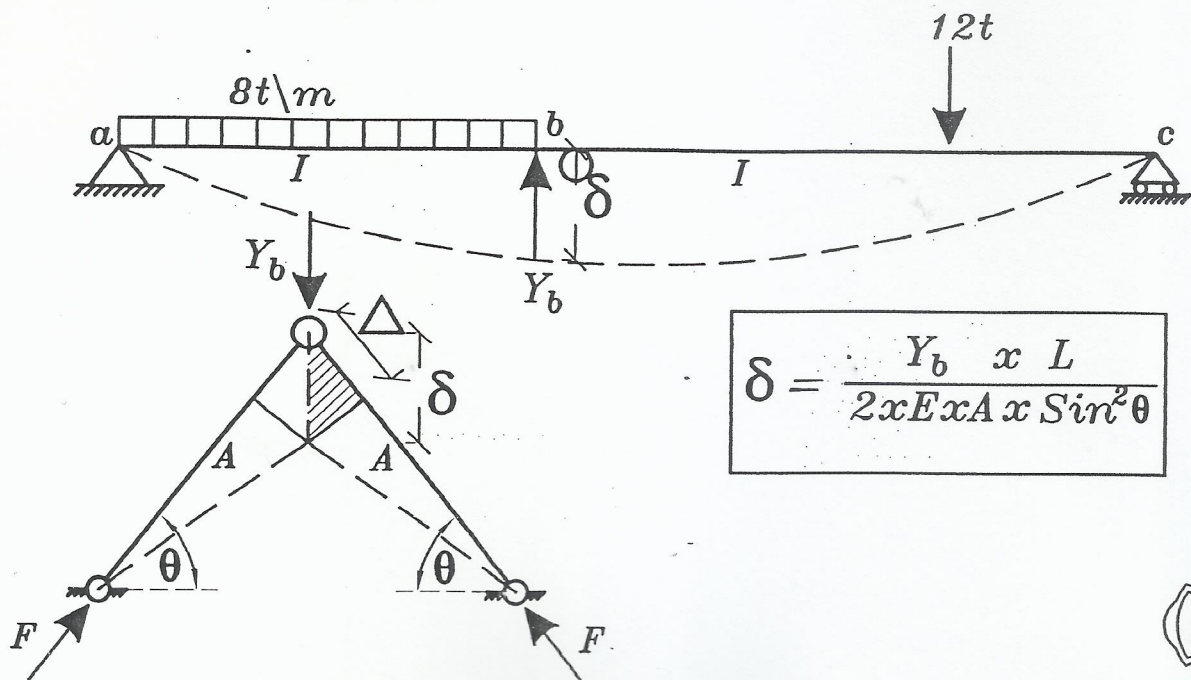


٤- نحسب ال Deflection في ال Correction system و يكون هو δ_{b1} .



$$\delta_{b1} = \frac{1}{EI} [(-14.40 \times 6) + (10.8 \times 2)] = \frac{-64.8}{EI}$$

٥- نساوي ال Deflection النهائي عند النقطة الموجود عندها ال Link بقيمة ال displacement الحادثة نتيجة ال Links.



$$\delta = \frac{Y_b \times L}{2 \times E \times A \times \sin^2 \theta}$$

$$\delta_{b0} + \delta_{b1} \times Y_b = \frac{Y_b \times L}{2 \times E \times A \times \sin^2 \theta}$$

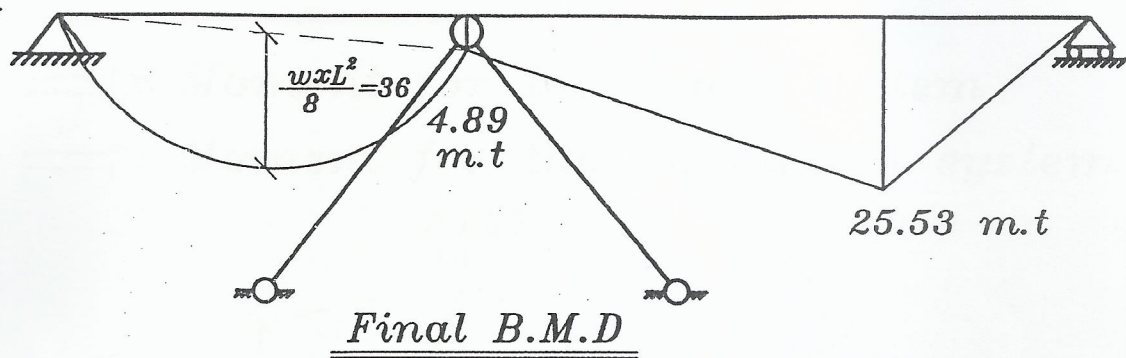
$$\frac{2246.4}{EI} + \frac{-64.8}{EI} \times Y_b = \frac{Y_b \times 5}{2 \times E \times A \times 0.8^2}$$

$$Y_b = 26.64t$$

$$M_{final} = M_0 + (Y_b) M_1$$

$M_0 \Rightarrow$ Moment for the main system

$M_1 \Rightarrow$ Moment for the Correction system



Force in link member لو مطلوب

$$F = \frac{Y_b}{2 \sin \theta} = \frac{26.64}{2 \times 0.8} = 16.65t$$

Considering the link member is rigid.

الفرق الوحيد يكون في خطوة رقم ٥

٥- نساوي ال Deflection النهائي عند النقطة الموجود عندها ال Link بقيمة ال Zero لانه في حالة ال Rigid نضع Roller مكان ال Links

$$\delta_{b0} + \delta_{b1} x Y_b = 0$$

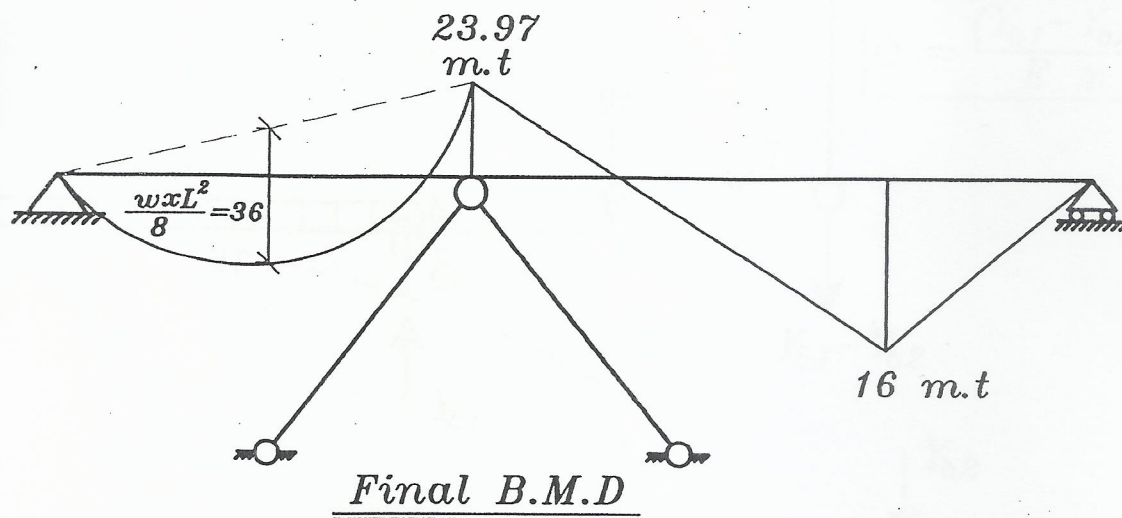
$$\frac{2246.4}{EI} + \frac{-64.8}{EI} x Y_b = 0$$

$$Y_b = 34.66t$$

$$M_{final} = M_0 + (Y_b) M_1$$

$M_0 \Rightarrow$ Moment for the main system

$M_1 \Rightarrow$ Moment for the Correction system

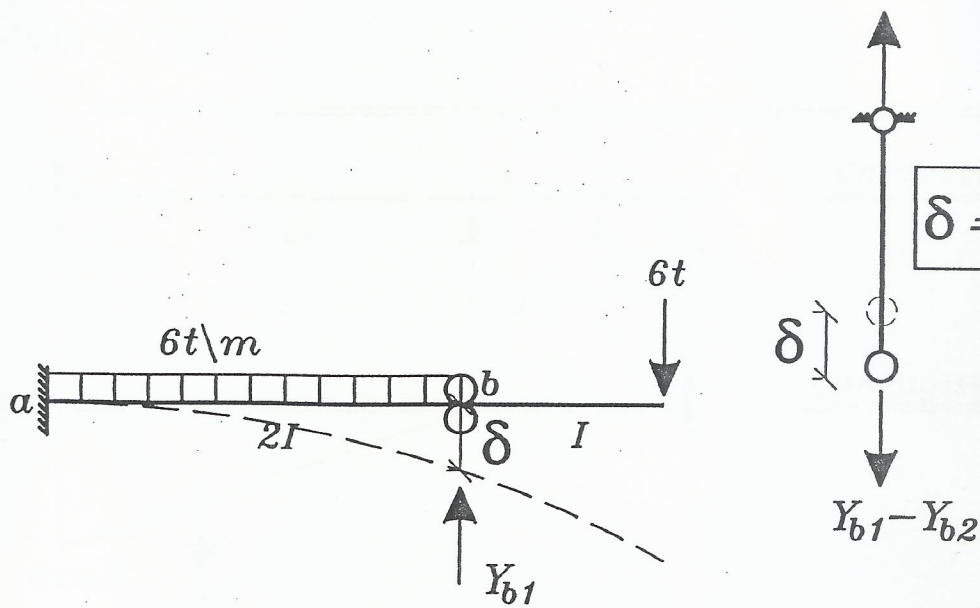
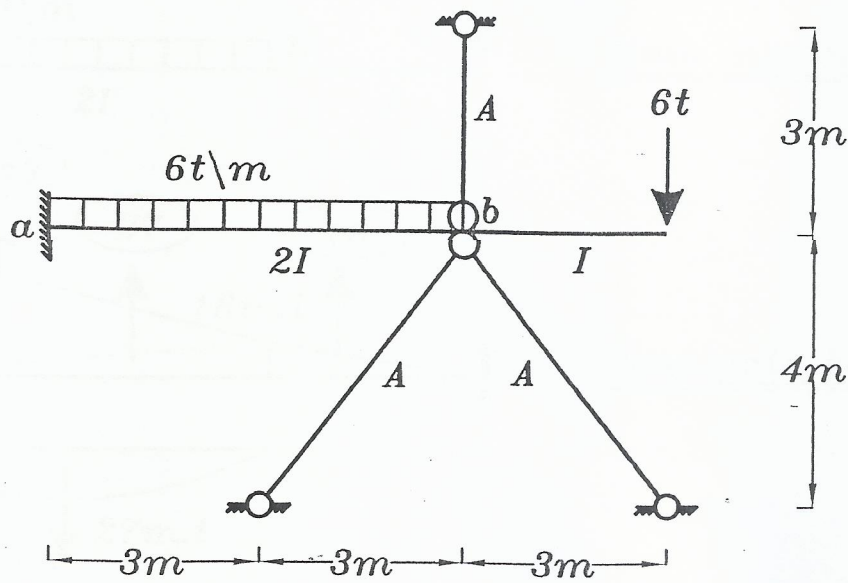


لو مطلوب ال Force in link member

$$F = \frac{Y_b}{2 \sin \theta} = \frac{34.66}{2 \times 0.8} = 21.67t$$

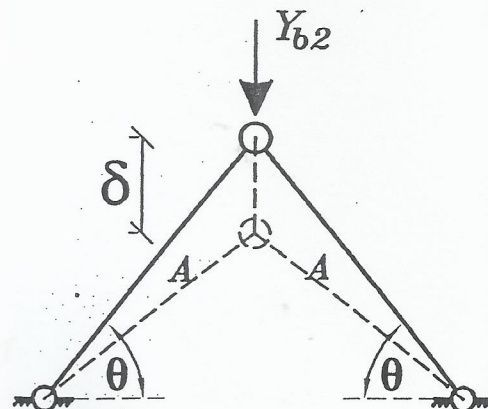
Example:

For the shown beam draw the B.M.D ($EI=3EA$).

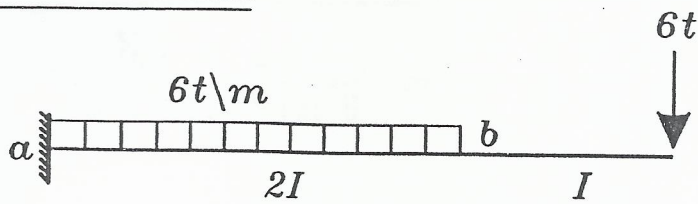


$$\delta = \frac{(Y_{b1} - Y_{b2}) x L_1}{E x A}$$

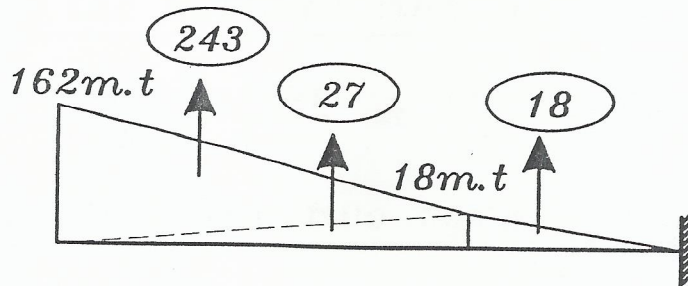
$$\delta = \frac{Y_{b2} x L_2}{2 x E x A x \sin^2 \theta}$$



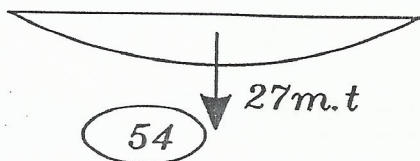
Part (1)



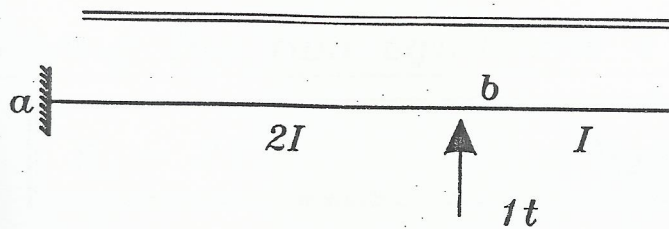
Main system(0)



Conjugate beam $/EI$

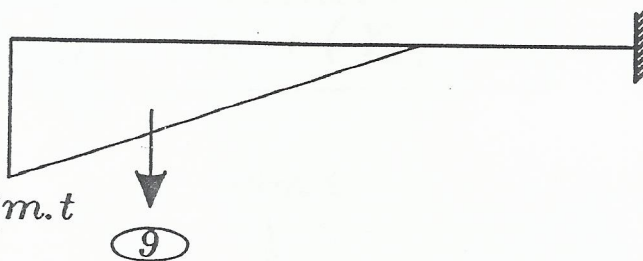


$$\delta_{b0} = \frac{864}{EI}$$



Correction system(1)

$$xY_{1b}$$



Conjugate beam $/EI$

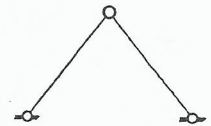
$$\delta_{b1} = \frac{-36}{EI}$$

$$\delta_{b0} + \delta_{b1} xY_{1b} = \delta$$

$$\frac{864}{EI} + \frac{-36}{EI} xY_{1b} = \delta \Rightarrow \text{EQ.1}$$

or the two inclined link members

$$\delta = \frac{Y_{b2} \times L_2}{2 \times E \times A \times \sin^2 \theta} = \frac{3.9 Y_{b2}}{E \times A} \Rightarrow \text{EQ.2}$$



For the vertical link members

$$\delta = \frac{(Y_{b1} - Y_{b2}) \times L_1}{E \times A} = \frac{3(Y_{b1} - Y_{b2})}{E \times A} \Rightarrow \text{EQ.3}$$

Equating the two equations 1&2

$$\frac{864}{EI} + \frac{-36}{EI} \times Y_{b1} = \frac{3.9 Y_{b2}}{E \times A} \Rightarrow \text{EQ.4}$$

Equating the two equations 2&3

$$\frac{3.9 Y_{b2}}{E \times A} = \frac{3(Y_{b1} - Y_{b2})}{E \times A} \Rightarrow \text{EQ.5}$$

Solving the two equations 4 & 5

$$Y_{b1} = 21 \text{ t}$$

$$Y_{b2} = 9.14 \text{ t}$$

$$M_{\text{final}} = M_0 + (Y_{b1}) M_1$$

