

## Por que aprender Geometria Plana?

O estudo da Geometria nasceu da necessidade que o homem tinha em medir as suas terras.

É de grande importância conhecermos as formas e suas características, para podermos utilizá-las melhor no nosso cotidiano.

## Onde usar os conhecimentos sobre Geometria Plana?

Na maior parte do tempo, você não utiliza a Geometria, mas sim se utiliza dela.

Este livro que você está lendo tem uma forma geométrica. O espaço ocupado por este pequeno texto nada mais é do que a utilização de uma pequena área desta figura geométrica.

A cadeira que você senta, a mesa que você usa, entre tantos outros objetos, são figuras e formas geométricas.

## Capítulo 1

### GEOMETRIA PLANA

#### Introdução

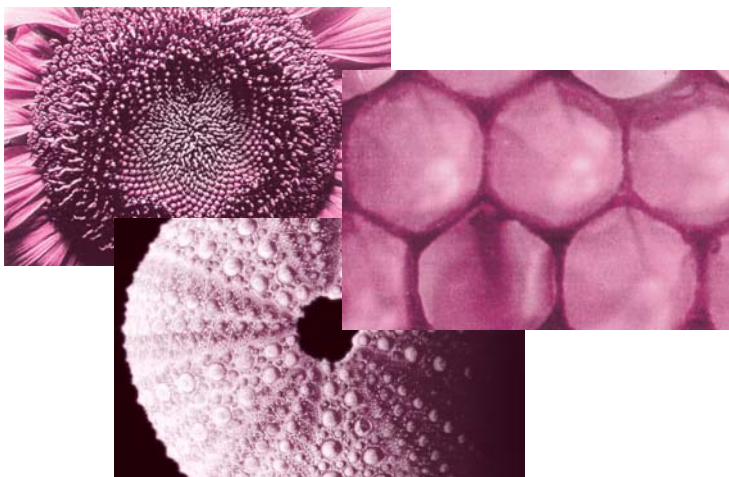
A palavra Geometria tem origem grega e significa “medida da terra” (*geo* = terra; *metria* = medida).

No antigo Egito, a geometria era muito utilizada, um exemplo disso são as grandes pirâmides. Eles mediam sombras, inventaram os relógios de sol e construíram edifícios.

Por volta do século X a.C., os gregos começaram a transformar a ciência prática numa abstração.

Na geometria destacaram-se grandes matemáticos, como Pitágoras, Euclides e Arquimedes, que descobriram as fórmulas para desenhar e medir figuras planas, como círculos, esferas e triângulos. O interesse pelas formas geométricas, não se preocupando com as medidas, acompanha os seres humanos até hoje.

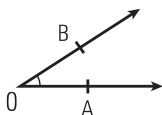
Neste capítulo, faremos uma revisão de alguns conceitos importantes em geometria plana.



## Ângulos

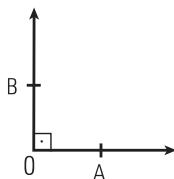
Podemos classificar os ângulos em:

Ângulo agudo



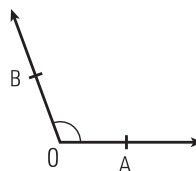
$$m(\widehat{AOB}) < 90^\circ$$

Ângulo reto




$$m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$$

Ângulo obtuso



$$m(\widehat{AOB}) > 90^\circ$$

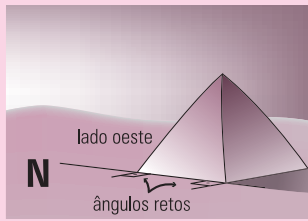


### Saiba mais

A História está presente até na Geometria. A localização das pirâmides era obtida traçando-se o lado oeste sempre em direção ao norte.

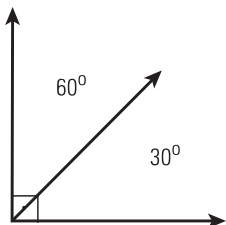
Os três lados restantes eram traçados, em relação ao primeiro, em ângulo reto.

**COMO PODEMOS RELACIONAR UM ÂNGULO COM AS PIRÂMIDES?**



### Ângulos Complementares

Dados dois ângulos, dizemos que eles são complementares quando a soma das medidas for  $90^\circ$ .



$$30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

Para descobrirmos o complemento de um ângulo, usaremos a expressão  $(90^\circ - x)$ .

Exemplo:

Dê o complemento de um ângulo de  $20^\circ$ .

Solução:

Seu complemento será  $90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$ .



## Saiba mais

### ÂNGULO CERTO

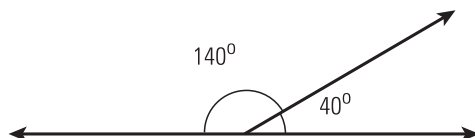
Para saber quantos graus um astro estava acima do horizonte, usava-se a balestrilha (conjunto de varas grudadas, perpendiculares entre si). Olhava-se por uma ponta da maior e movia-se a menor. Quando a extremidade de cima da vara menor encontrava o astro e a de baixo encontrava-se no horizonte, formava-se o ângulo com o qual se podia calcular a altura da estrela.



Fonte: *Superinteressante*,  
abril,  
1999.

## Ângulos Suplementares

Dados dois ângulos, dizemos que eles são suplementares quando a soma das medidas for  $180^\circ$ .



$$140^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

Para descobrirmos o suplemento de um ângulo, usaremos a expressão  $(180^\circ - x)$ .

Exemplo:

A metade do suplemento de um ângulo mede  $80^\circ$ . Determine  $x$ .

Solução:

$$\frac{180^\circ - x}{2} = 80^\circ$$

$$180 - x = 160$$

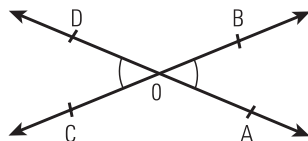
$$-x = -20$$

$$x = 20^\circ$$

## Ângulos Formados por Duas Retas Concorrentes

### Ângulos Opostos pelo Vértice (o. p. v.)

Dois ângulos são opostos pelo vértice quando o lado de um deles é semi-reta oposta ao lado do outro.



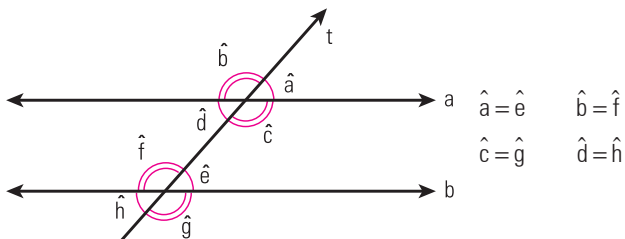
$$\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{C}\hat{O}\hat{D}$$

$$\hat{A}\hat{O}\hat{C} = \hat{B}\hat{O}\hat{D}$$

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

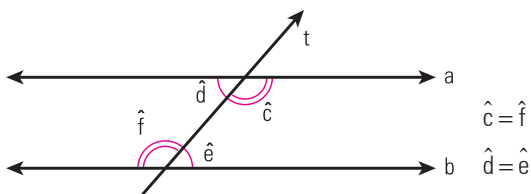
### Ângulos Formados por Duas Retas Paralelas Cortadas por uma Transversal

#### Ângulos Correspondentes



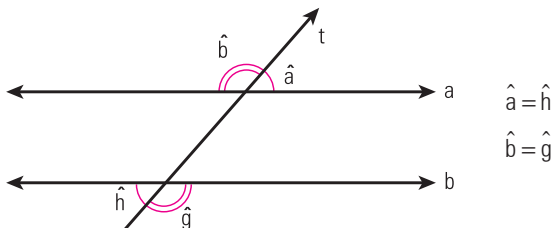
Ângulos correspondentes são congruentes.

#### Ângulos Alternos Internos



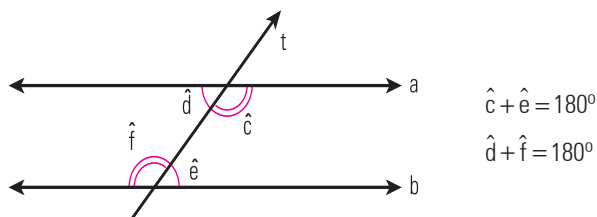
Ângulos alternos internos são congruentes.

#### Ângulos Alternos Externos



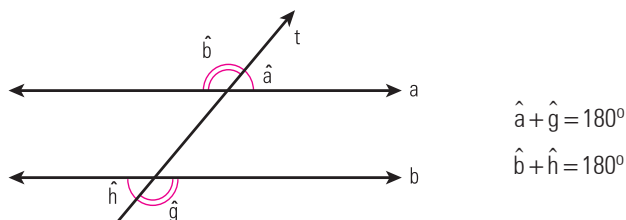
Ângulos alternos externos são congruentes.

### Ângulos Colaterais Internos



Ângulos colaterais internos são suplementares.

### Ângulos Colaterais Externos



Ângulos colaterais externos são suplementares.

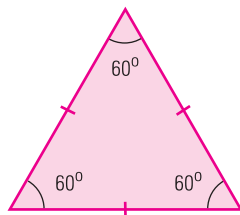
## Triângulos

### Classificação

Podemos classificar os triângulos quanto aos lados e aos ângulos.

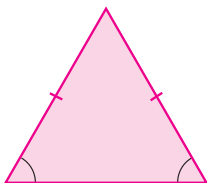
### Quanto aos Lados

#### Equilátero



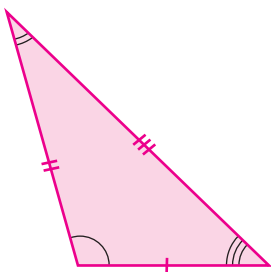
Possui três lados iguais e os três ângulos internos congruentes.

### Isósceles



Possui dois lados iguais e os ângulos da base são congruentes.

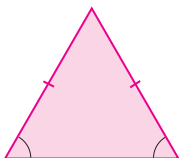
### Escaleno



Possui os três lados e ângulos diferentes.

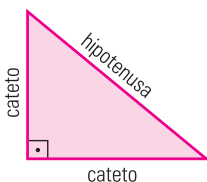
### Quanto aos Ângulos

#### Acutângulo



Possui os ângulos internos agudos.

#### Retângulo

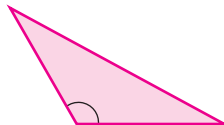


Possui um ângulo reto.



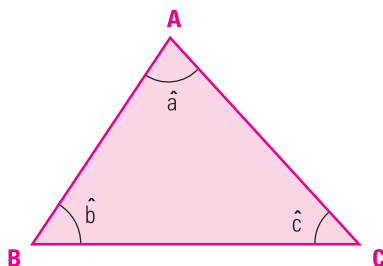
Os lados do triângulo retângulo recebem nomes especiais: catetos e hipotenusa.

### Obtusângulo



Possui um ângulo obtuso.

### Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo



$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$$



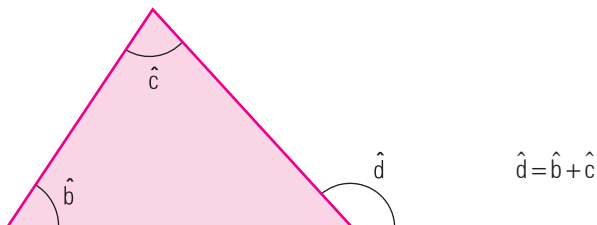
### Saiba mais

O triângulo é uma das figuras mais importantes da Geometria. Eles são utilizados, por exemplo, em construções.

Observe na armação de um telhado os diferentes tipos de triângulos que podem ser encontrados.



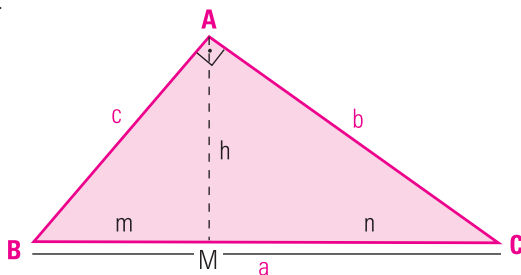
### Ângulo externo



Em qualquer triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

### Relações Métricas num Triângulo Retângulo

Dado um triângulo retângulo, podemos estabelecer as seguintes relações métricas:



- $a$  –  $m(\overline{BC})$  hipotenusa
- $b$  –  $m(\overline{AC})$  cateto
- $c$  –  $m(\overline{AB})$  cateto
- $h$  –  $m(\overline{AM})$  altura
- $m$  – projeção referente ao cateto  $c$
- $n$  – projeção referente ao cateto  $b$

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ (Teorema de Pitágoras)}$$

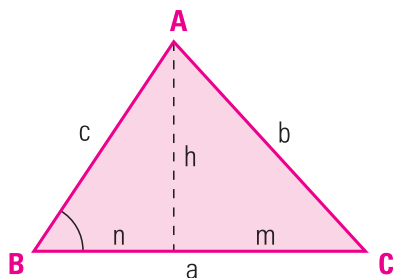
$$b^2 = a \cdot n$$

$$c^2 = a \cdot m$$

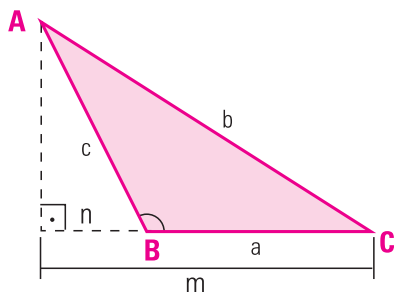
$$h^2 = m \cdot n$$

$$a \cdot h = b \cdot c$$

## Relações Métricas num Triângulo Qualquer



$$\hat{b} = \hat{a} + \hat{c} - 2an$$



$$\hat{b} = \hat{a} + \hat{c} + 2an$$

## Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

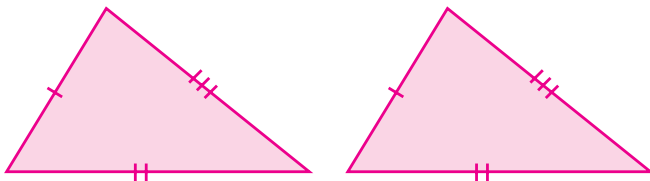


### Saiba mais

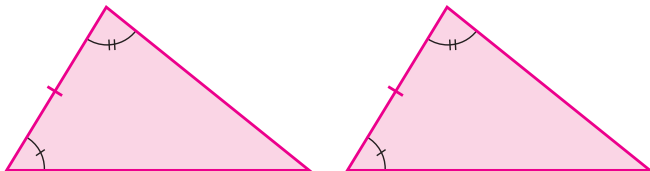
Com o auxílio da semelhança de triângulos e do teorema de Pitágoras, podemos descobrir distâncias sem fazer cálculos direto das medidas, como, por exemplo, a largura de um rio e a distância entre dois pontos com um obstáculo no meio.

## Crêterios de Semelhança

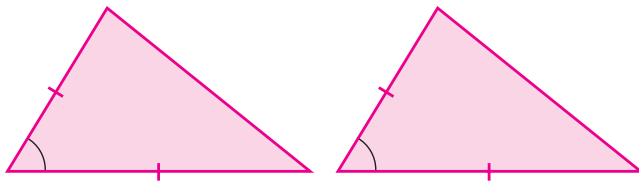
1  Caso: L. L. L.



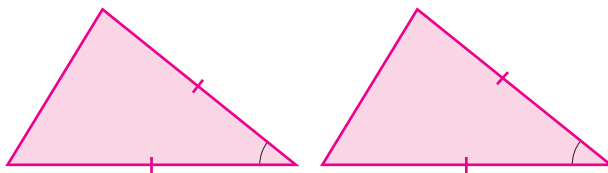
2  Caso: A. L. A.



3  Caso: L. A. L.



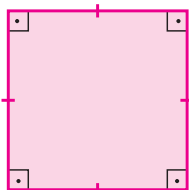
4  Caso: L. A. A .



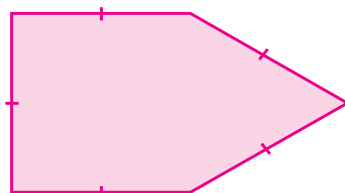
### Polígonos Regulares

Todo polígono que possui todos os seus lados congruentes é regular.

Exemplos:



quadrilátero regular



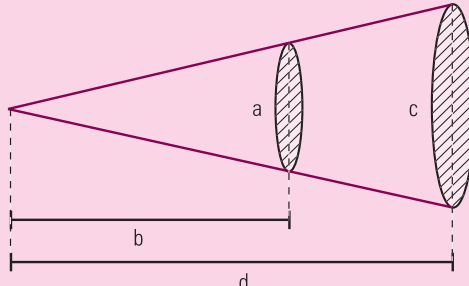
pentágono regular



### Saiba mais

**COMO PODEMOS RELACIONAR A SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS COM A FÍSICA?**

Podemos utilizar a idéia geométrica da semelhança de triângulo para determinar o tamanho da sombra e da penumbra (região onde há um pouco de luz), por exemplo, que ocorre nos eclipses, com o Sol funcionando como fonte extensa de luz.

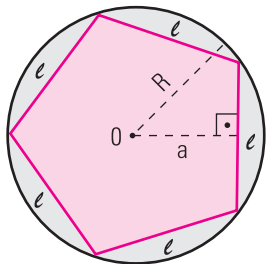


$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

## Manual de Matemática

### Elementos de um Polígono Regular

Dado um polígono regular inscrito num círculo, temos:



- $a$  — apótema do polígono
- $l$  — lado do polígono
- $R$  — o raio da circunferência circunscrita
- $A$  — a área do polígono inscrito
- $\pi$  — o semiperímetro do polígono

#### Obs.:

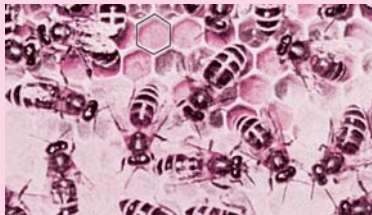
A medida do apótema de um polígono é igual ao segmento que parte do centro formando um ângulo reto com o lado.



### Saiba mais

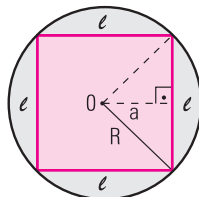
#### A BELEZA ESTÁ SEMPRE AO NOSSO REDOR

As várias formas encontradas na natureza têm chamado a nossa atenção há muitos séculos. Os favos de mel construídos pelas abelhas, por exemplo, têm o formato de um polígono.



## Relações Métricas nos Polígonos Regulares

Quadrado

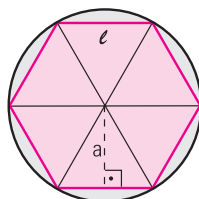


$$l_4 = R\sqrt{2}$$

$$a_4 = \frac{l_4}{2}$$

$$A = 2R^2$$

Hexágono

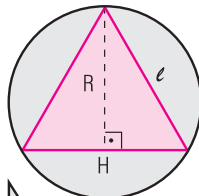


$$l_6 = R$$

$$a_6 = \frac{l_6\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{3l_6^2\sqrt{3}}{2}$$

Triângulo equilátero

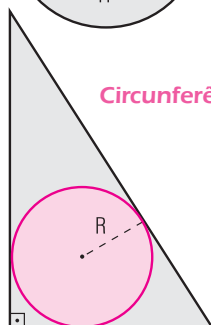


$$l_3 = R\sqrt{3}$$

$$a_3 = \frac{R}{2}$$

$$A = p \cdot a$$

Circunferência inscrita em um triângulo retângulo



$$h = 3R$$

# Manual de Matemática

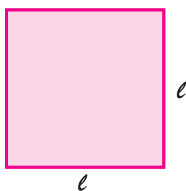
## Resumindo

Polígonos inscritos e circunscritos:

	inscrito		circunscrito	
	lado	apótema	lado	apótema
Quadrado	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2r$	$r$
Hexágono	$R$	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2r\sqrt{3}}{3}$	$r$
Triângulo equilátero	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$2r\sqrt{3}$	$r$

## Área das Principais Figuras Geométricas Planas

### Quadrado



$\ell \rightarrow$  lado

$$A = \ell^2$$

## Saiba mais

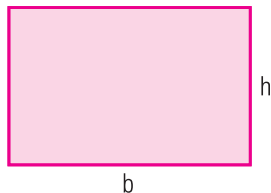
Num parafuso, o polígono é sempre regular.

Os mecânicos, para consertar um defeito num automóvel e deixar o trabalho mais cômodo, necessitam de parafusos sextavados, pois eles podem ser apertados ou desapertados com ângulos de  $60^\circ$ , apresentando assim movimentos mais curtos para o braço.

Parafuso Sextavado

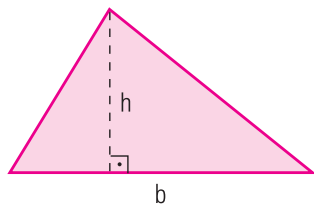


### Retângulo



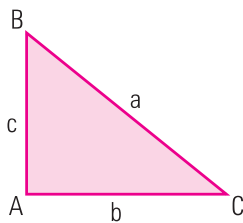
$b \rightarrow$  base  
 $h \rightarrow$  altura  
 $A = b \cdot h$

### Triângulo



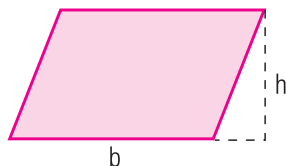
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

### Triângulo Retângulo



$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

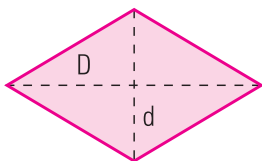
### Paralelogramo



$$A = b \cdot h$$

## Manual de Matemática

### Losango

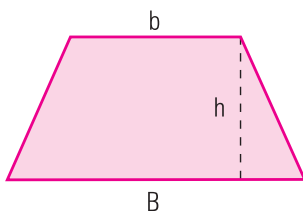


$d \rightarrow$  diagonal menor

$D \rightarrow$  diagonal maior

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

### Trapézio

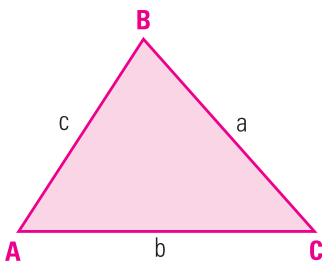


$b \rightarrow$  base menor

$B \rightarrow$  base maior

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

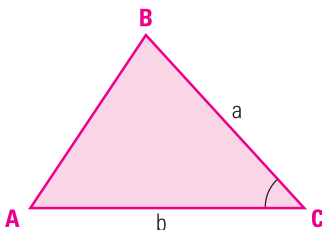
### Triângulo qualquer em função dos lados



$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

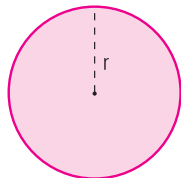
$$\text{em que } p = \frac{a + b + c}{2}$$

### Triângulo qualquer em função de dois lados e do ângulo compreendido



$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$$

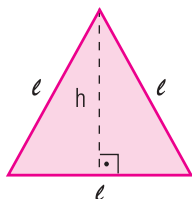
### Círculo



$$A = \pi r^2$$

### Obs.:

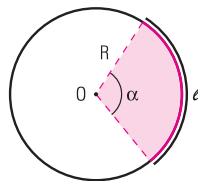
No triângulo equilátero temos:



$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

### Setor Circular



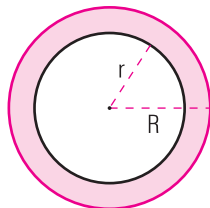
$\alpha$  em graus:

$$A = \frac{\alpha \pi R^2}{360^\circ}$$

$\alpha$  em radianos:

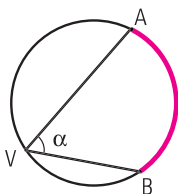
$$A = \frac{\alpha R^2}{2}$$

### Coroa Circular



$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

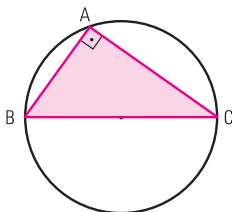
### Ângulo Inscrito em uma Circunferência



$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

#### Obs.:

Todo ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.



$\Delta ABC$  é retângulo



### Saiba mais

#### FIGURAS GEOMÉTRICAS E URBANIZAÇÃO

Nas grandes cidades, há muitas favelas, sem planejamento de casas e ruas.

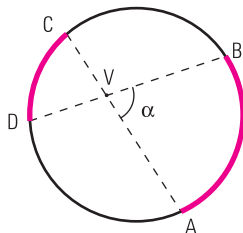
Para melhorar as condições de vida, uma das soluções é a execução de obras de urbanização.

Com isso, melhora-se o traçado das ruas e as casas são derrubadas para serem construídas em lugares melhores, tornando assim possível a instalação de esgoto e a coleta de lixo.

Para a urbanização das favelas, é necessário inicialmente fazer uma planta, utilizando figuras geométricas.

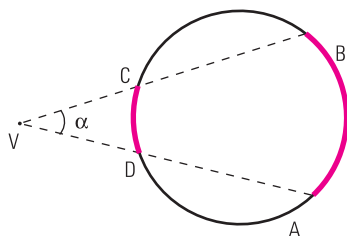
Será que isso resolve o problema das favelas? E o que podemos fazer quanto à questão social?

### Ângulo de Vértice Interno



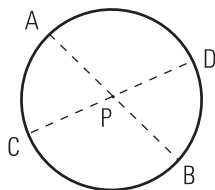
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

### Ângulo de Vértice Externo

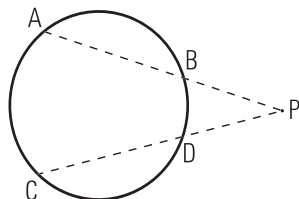


$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

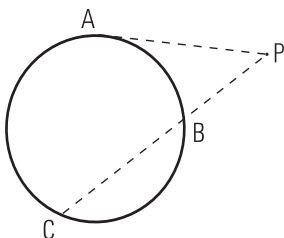
### Relações Métricas na Circunferência



$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

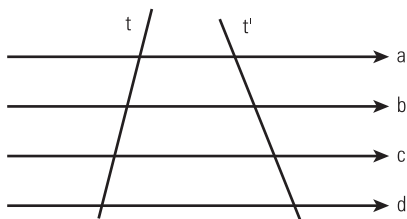


$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$



$$\overline{PA}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$$

## Teorema de Tales

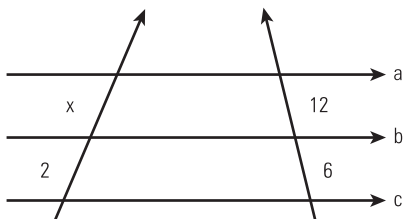


Um feixe de retas paralelas determina sobre suas transversais segmentos proporcionais.

Exemplos:

Determine o valor desconhecido das figuras.

a)

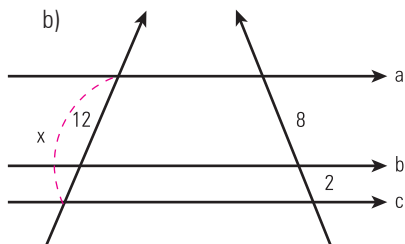


Solução:

$$\frac{x}{2} = \frac{12}{6}$$

$$6x = 24$$

$$x = 4$$

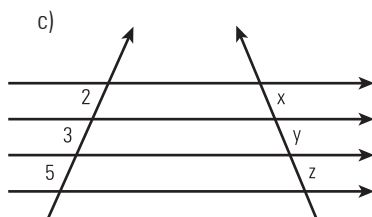


Solução:

$$\frac{x}{12} = \frac{10}{8}$$

$$8x = 120$$

$$x = 15$$



Seja  $x + y + z = 40$

Solução:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{40}{10} = 4$$

$$\frac{x}{2} = 4 \Rightarrow x = 8$$

$$\frac{y}{3} = 4 \Rightarrow y = 12$$

$$\frac{z}{5} = 4 \Rightarrow z = 20$$

## Capítulo 2

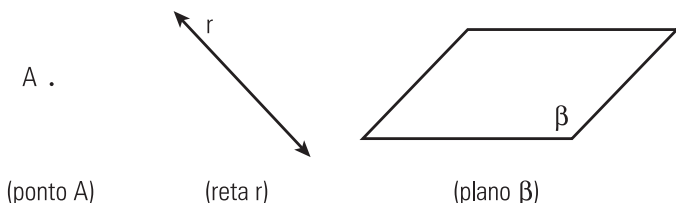
### GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

#### Introdução

O universo está cheio de objetos, coisas de várias formas e tamanhos, que ocupam as mais variadas posições.

Freqüentemente nos preocupamos em medir, comparar e analisar posições de objetos.

Em Geometria plana, alguns conceitos são primitivos, como o ponto, a reta e o plano.



**Representamos:**

**Ponto** com letra maiúscula do nosso alfabeto.

**Reta** com letra minúscula do nosso alfabeto.

**Plano** com letra grega ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ...).

**Postulados** ou **axiomas**: são proposições consideradas como verdadeiras, não sendo necessário demonstração.

**Teoremas**: são proposições que, para serem aceitas como verdadeiras, precisam ser demonstradas.

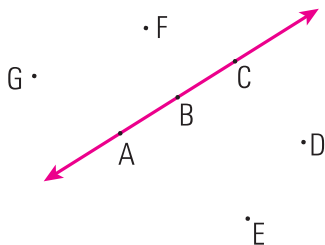
#### Principais Postulados da Geometria

$P_1$  — existem infinitos pontos, infinitas retas e infinitos planos.

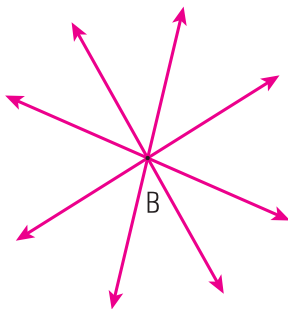
$P_2$  — numa reta existem infinitos pontos e fora dela também.



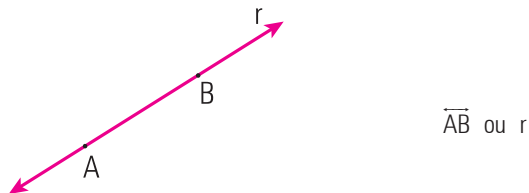
H •



$P_3$  — por um ponto passam infinitas retas.

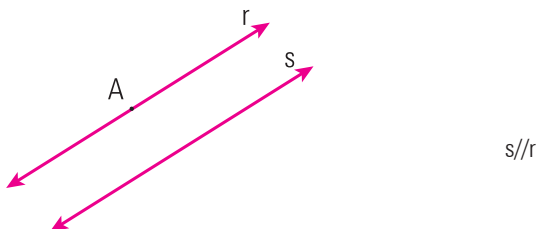


$P_4$  — dois pontos distintos determinam uma única reta.

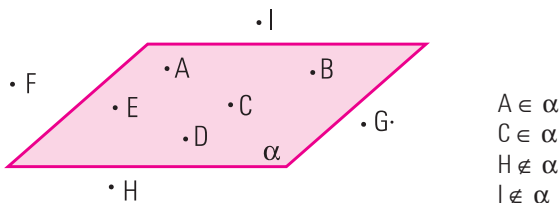


## Manual de Matemática

$P_5$  — por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada (Postulado de Euclides).



$P_6$  — num plano existem infinitos pontos e fora dele também.



### Saiba mais



#### RAIO DE LUZ

Ao abrimos a janela de nosso quarto de manhã, é comum entrar a luz solar.

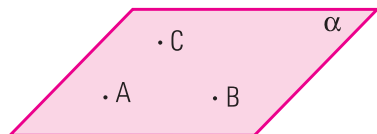
Podemos criar a idéia de raio de luz, com base em um segmento de reta.

Para definir o sentido da propagação da luz, usamos segmentos de retas orientados.

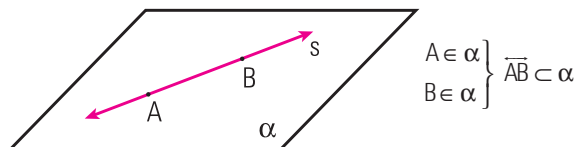
Veja a figura ao lado:



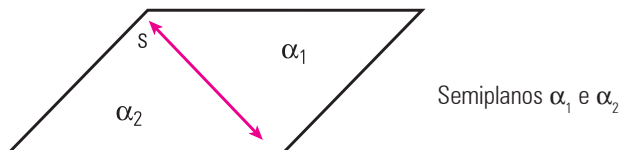
$P_7$  — três pontos não colineares determinam um único plano.



$P_8$  — se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida no plano.



$P_9$  — uma reta qualquer de um plano divide-o em dois semiplanos opostos, dos quais ela é a origem.

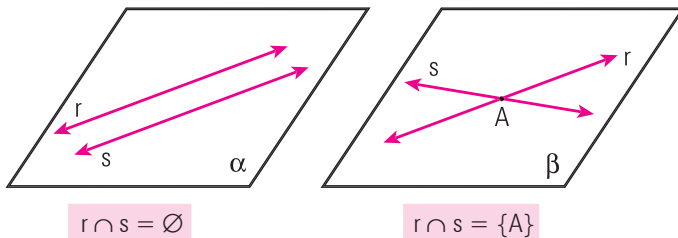


## Posições Relativas de Duas Retas

Duas retas distintas podem ser coplanares ou reversas.

### Retas Coplanares

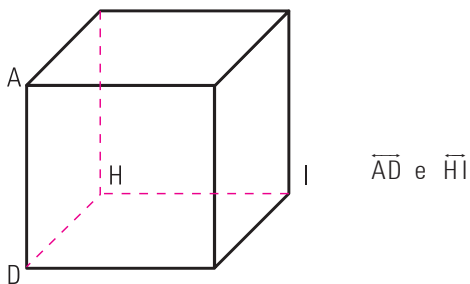
Duas retas são coplanares quando estão contidas no mesmo plano.



## Manual de Matemática

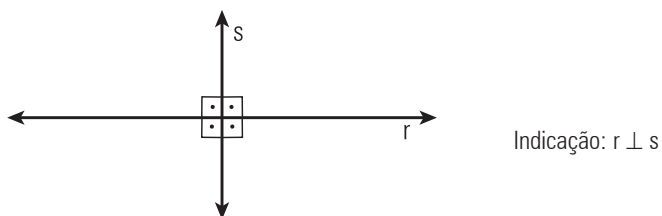
### Retas Reversas

Duas retas são reversas se não estão contidas no mesmo plano.

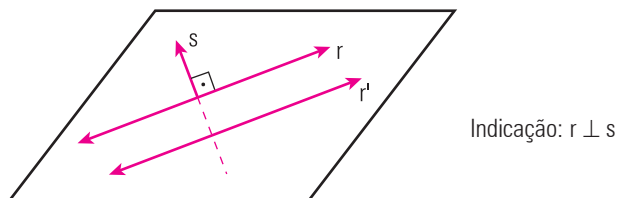


### Retas Perpendiculares

Duas retas são perpendiculares quando formam quatro ângulos retos.



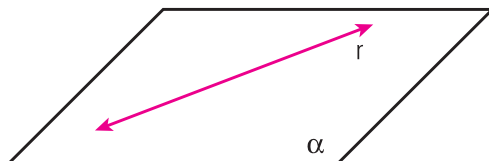
### Retas Ortogonais



Duas retas são ortogonais se existir uma reta paralela a uma delas e perpendicular à outra.

## Posições Relativas de uma Reta e um Plano

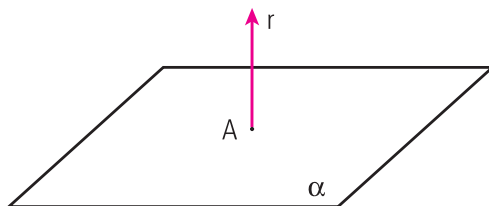
### Reta Contida no Plano



Todos os pontos da reta pertencem também ao plano.

$$r \subset \alpha \Rightarrow r \cap \alpha = r$$

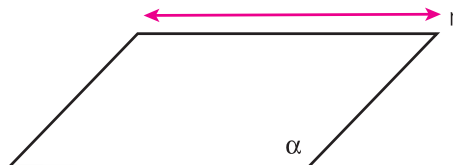
### Reta e Plano Concorrentes



A reta e o plano possuem um único ponto em comum.

$$r \cap \alpha = \{A\}$$

### Reta Paralela ao Plano

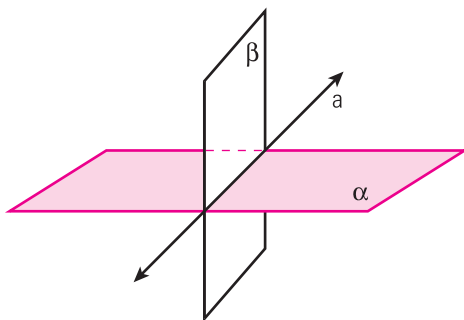


A reta e o plano não possuem ponto em comum.

$$r // \alpha \Rightarrow r \cap \alpha = \emptyset$$

### Posições Relativas de Dois Planos

#### Planos Secantes ou Concorrentes



Possuem uma única reta em comum.

$$\alpha \cap \beta = a$$

#### Planos Paralelos



Dois planos não têm ponto em comum.

$$\alpha // \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$$

## Capítulo 3

### GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL

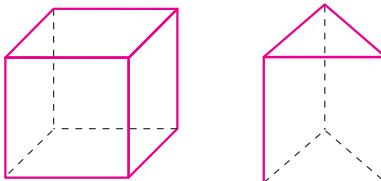
No cotidiano, estamos cercados de objetos que têm formas diferentes. Por exemplo, uma caixa de papelão; suas faces são retângulos, uma caixa é um paralelepípedo, uma lata de óleo tem a forma de um cilindro e sua base é um círculo.

Veja outros exemplos:



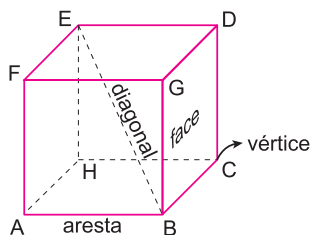
### Poliedros

Define-se poliedro como o sólido geométrico limitado por polígonos que possuem, dois a dois, um lado comum.



### Elementos dos Poliedros

Os elementos de um poliedro são: faces, arestas e vértices.



Na figura, temos:

- 6 faces
- 12 arestas
- 8 vértices
- 4 diagonais

De acordo com o número de faces, podemos classificar os poliedros em:

4 faces – tetraedro

5 faces – pentaedro

6 faces – hexaedro

7 faces – heptaedro

8 faces – octaedro

10 faces – decaedro

12 faces – dodecaedro

⋮ ⋮

20 faces – icosaedro

### Poliedro Regular

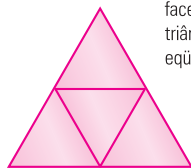
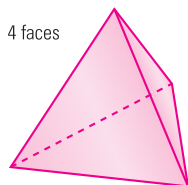
Um poliedro é regular se suas faces são polígonos regulares com o mesmo número de lados.

Há somente cinco poliedros regulares.

Exemplos:

#### Tetraedro regular

Forma planificada

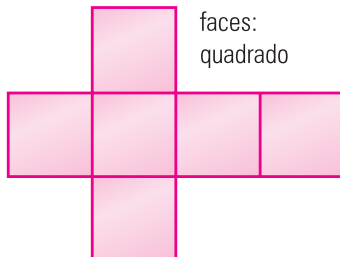
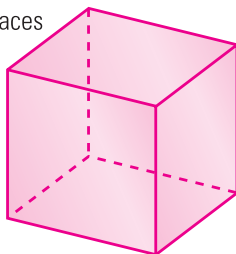


faces:  
triângulos  
equiláteros

#### Hexaedro (cubo)

Forma planificada

6 faces

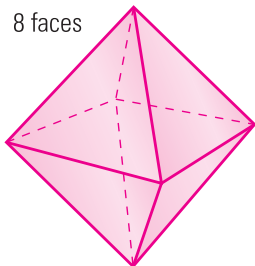


faces:  
quadrado



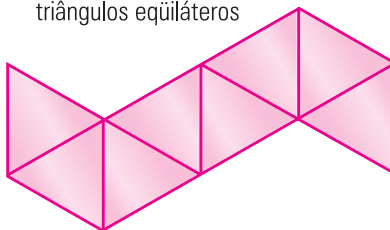
### Octaedro regular

8 faces



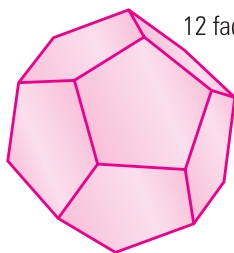
Forma planificada

faces:  
triângulos eqüiláteros



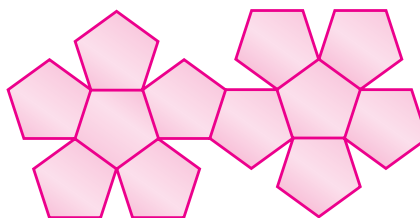
### Dodecaedro regular

12 faces



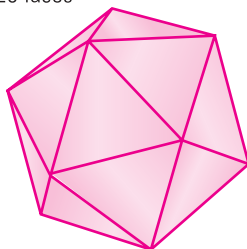
Forma planificada

faces: pentágonos regulares

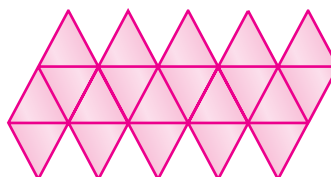


### Icosaedro regular

20 faces



faces: triângulo eqüiláteros



### Relação de Euler

Em todo poliedro convexo, vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

em que:  $V$  = número de vértices

$A$  = número de arestas

$F$  = número de faces

Resumindo

Nome	$v$	$A$	$F$	$S$
Tetraedro	4	6	4	$720^\circ$
Hexaedro	8	12	6	$2160^\circ$
Octaedro	6	12	8	$1440^\circ$
Dodecaedro	20	30	12	$6480^\circ$
Icosaedro	12	30	20	$3600^\circ$

Em que  $S = (V - 2) \cdot 360^\circ$  (soma dos ângulos de todas as faces).

Exemplos:

- 1) Num poliedro convexo, o número de faces é 8 e o número de arestas é 12. Qual é o número de vértices desse poliedro?

Solução:

Usando a relação de Euler, temos:

$$V + F = A + 2$$

$$V + 8 = 12 + 2$$

$$V = 6$$

O poliedro possui 6 vértices.

- 2) Um poliedro convexo possui 2 faces triangulares e 3 faces quadrangulares. Determine o número de arestas e de vértices desse poliedro.

Solução:

$$\begin{array}{lcl} \text{Número de arestas} & \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ faces triangulares} \\ 3 \text{ faces quadrangulares} \end{array} \right. & \begin{array}{l} 2 \times 3 = 6 \\ 3 \times 4 = 12 \\ 18 \text{ arestas} \end{array} \end{array}$$

Uma aresta é comum a 2 faces, então  $2A = 18 \Rightarrow A = 9$ .

Número de vértices:

$$V + F = A + 2 \quad F = 2 + 3$$

$$V + 5 = 9 + 2 \quad F = 5$$

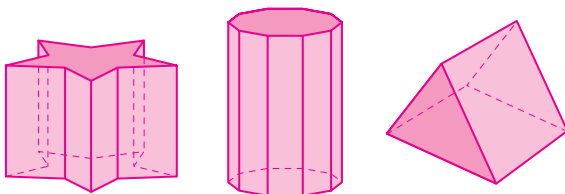
$$V = 11 - 5$$

$$V = 6$$

O poliedro possui 9 arestas e 6 vértices.

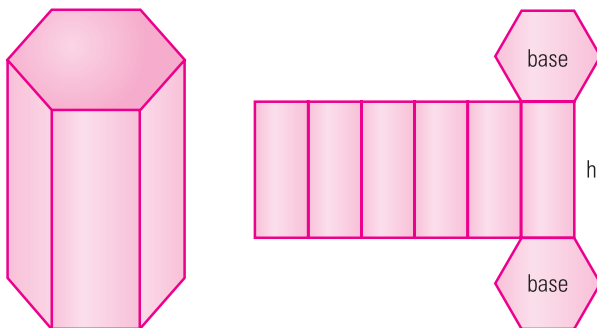
### Prisma

**Prisma** é um sólido delimitado por faces planas, em que as faces laterais são paralelogramos, e as bases são polígonos congruentes.



### Planificação de um Prisma

Considere um prisma hexagonal:

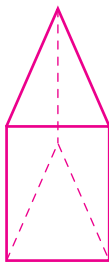


## Manual de Matemática

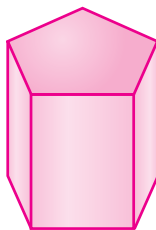
De acordo com o número de lados, os prismas classificam-se em:

Prisma	Bases
triangular	triângulos
quadrangular	quadriláteros
pentagonal	pentágonos
hexagonal	hexágonos

Exemplos:



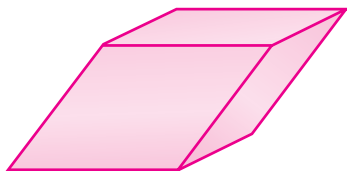
prisma triangular  
(bases são triângulos)



prisma pentagonal  
(bases são pentágonos)

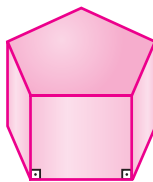
Conforme a inclinação das arestas laterais, os prismas classificam-se em retos e oblíquos.

Oblíquo



prisma oblíquo  
(quadrangular)

Reto



prisma regular  
(pentagonal)

### Área da superfície total de um prisma reto

É a soma das áreas das superfícies das bases com a área da superfície lateral.

$$A_t = 2 \cdot A_b + A_l$$

$A_b$  é a área da base do prisma.

$A_l$  é a soma das áreas das faces laterais.

### Volume

É o produto da área da base pela altura  $h$ .

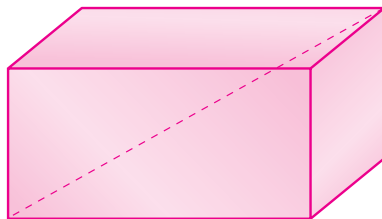
$$V = A_b \cdot h$$

### Paralelepípedo

São prismas nos quais as seis faces são paralelogramos.

### Paralelepípedo retângulo

É um paralelepípedo reto cujas faces são retângulos.



$a$  — comprimento  
 $b$  — largura  
 $c$  — altura  
 $D$  — diagonal

#### Fórmulas importantes:

diagonal da face:  $d = \sqrt{a^2 + c^2}$

diagonal:  $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

área total:  $A_t = 2(ab + ac + bc)$

volume:  $V = abc$

Exemplo:

Para encher uma caixa d'água de 3 metros de comprimento por 2 metros de largura e 2 metros de profundidade, foram necessários 12000 litros de água.

## Manual de Matemática

Solução:

Devemos calcular o volume da caixa d'água:

$$V = 3 \cdot 2 \cdot 2$$

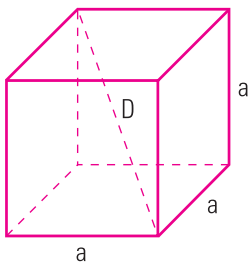
$$V = 12 \text{ m}^3$$

Relacionando  $1 \ell = 1 \text{ dm}^3$ , então  $12 \text{ m}^3 = 12000 \text{ dm}^3$

$$12000 \text{ dm}^3 = 12000 \ell$$

### Cubo


É um paralelepípedo cujas dimensões são iguais:  $a = b = c$ .



$$\text{Diagonal: } D = a\sqrt{3}$$

$$\text{Área total: } A_t = 6a^2$$

$$\text{Volume: } V = a^3$$



### Saiba mais

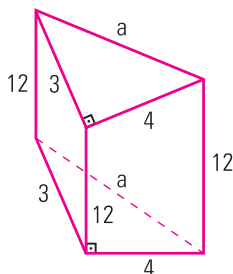
Quando há enchente, podemos verificar que alguns materiais, como a madeira e a lã de vidro, flutuam na água. Isso ocorre porque esses materiais apresentam densidade menor do que a água.

Material	Densidade(g/cm³)
madeira	0,65
lã de vidro	0,20
água	1,00

Exemplos:

1) Determine a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um prisma reto, de altura igual a 12 cm, cuja base é um triângulo retângulo de catetos 3 e 4 cm.

Solução:



$$A_b = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$a^2 = 4^2 + 3^2$$

$$a^2 = 25$$

$$a = 5$$

$$A_l = 4 \cdot 12 + 3 \cdot 12 + 5 \cdot 12$$

$$A_l = 144 \text{ cm}^2$$

$$A_t = A_l + 2A_b$$

$$A_t = 144 + 2 \cdot 6$$

$$A_t = 156 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h$$

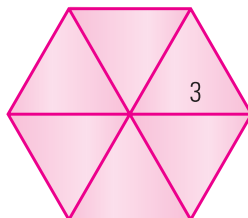
$$V = 6 \cdot 12$$

$$V = 72 \text{ cm}^3$$

2) Calcule o volume de um prisma hexagonal de altura 8 cm e aresta da base igual a 3 cm.

Solução:

Área da base:



A base é um hexágono formado por 6 triângulos equiláteros.

## Manual de Matemática

A área do hexágono é 6 vezes a área de cada um desses triângulos.

$$A_b = 6 \cdot \frac{e^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = \frac{6 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h$$

$$V = \frac{27}{2} \sqrt{3} \cdot 8$$

$$V = 108\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

3) Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 2, 3, 4 m, calcule:

a) a diagonal

$$D = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$$

$$D = \sqrt{4 + 9 + 16}$$

$$D = \sqrt{29} \text{ m}$$

c) o volume

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$V = 24 \text{ m}^3$$

b) a área total

$$A_t = 2(ab + bc + ac)$$

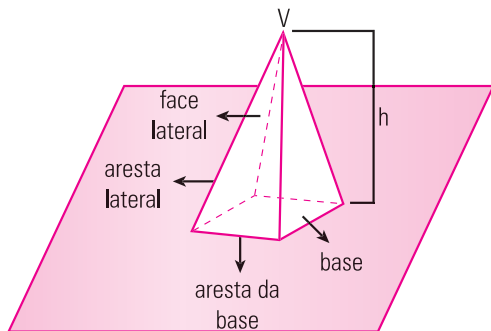
$$A_t = 2(2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4)$$

$$A_t = 2(6 + 12 + 8)$$

$$A_t = 52 \text{ m}^2$$

### Pirâmide

**Pirâmide** é um sólido delimitado por faces planas, em que suas faces laterais são triângulos e a base é um polígono.





## Classificação

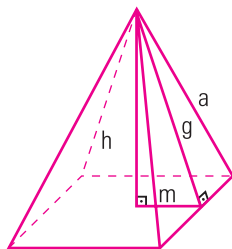
As pirâmides são classificadas de acordo com o número de lados dos polígonos da base.

Pirâmide	Base
Pirâmide triangular	triângulo
Pirâmide quadrangular	quadrilátero
Pirâmide pentagonal	pentágono
Pirâmide hexagonal	hexágono

## Pirâmide Regular

Uma pirâmide é regular quando sua base é um polígono regular.

## Área da Superfície Total



O apótema do polígono regular da base é chamado apótema da base ( $m$ ).  
A altura de uma face lateral é chamada apótema da pirâmide ( $g$ ).

### Área total

$$A_t = A_l + A_b$$

### Volume

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Exemplo:

Numa pirâmide quadrangular regular, a aresta da base mede 6 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide é 4 cm, calcule a área lateral, a área total e o volume da pirâmide.

## Manual de Matemática

Solução:

A base da pirâmide é um quadrado:

$$m = \frac{\ell}{2}$$

$$m = \frac{6}{2}$$

$$m = 3 \text{ cm}$$

- apótema da pirâmide (g)

$$g^2 = h^2 + m^2$$

$$g^2 = 4^2 + 3^2$$

$$g^2 = 25$$

$$g = 5$$

- área lateral

$$A_{\ell} = 4 \cdot A_f$$

$$A_{\ell} = 4 \cdot 15$$

$$A_{\ell} = 60 \text{ cm}^2$$

$$A_f = \frac{\ell \cdot g}{2}$$

$$A_f = \frac{6 \cdot 5}{2}$$

$$A_f = 15 \text{ cm}^2$$

- área total

$$A_t = A_{\ell} + A_b$$

$$A_t = 60 + 36$$

$$A_t = 96 \text{ cm}^2$$

$$A_b = 6^2$$

$$A_b = 36 \text{ cm}^2$$

- volume

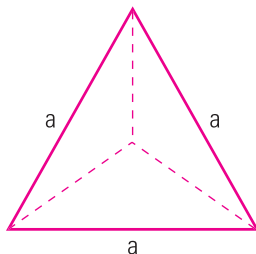
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4$$

$$V = 48 \text{ cm}^3$$

### Tetraedro

É uma pirâmide de base triangular em que todas as faces são triângulos equiláteros.



- apótema lateral é a altura de um triângulo equilátero  $g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .
- altura da pirâmide é dada por  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

Área da base

$$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Área total

$$A_t = a^2\sqrt{3}$$

Volume

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Exemplo:

A aresta de um tetraedro regular mede 6 cm.

Calcule:

a) a medida da altura do tetraedro

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$h = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

b) a área total do tetraedro

$$A_t = a^2 \sqrt{3}$$

$$A_t = 6^2 \sqrt{3}$$

$$A_t = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

c) o volume

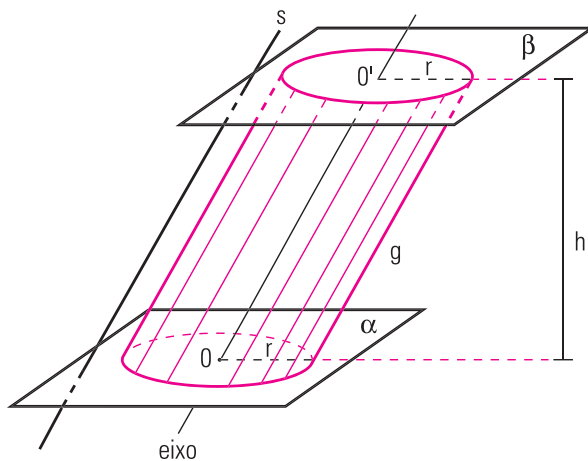
$$V = \frac{6^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$V = \frac{216 \sqrt{2}}{12}$$

$$V = 18\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

### Cilindro

Definimos cilindro como o sólido formado pelos infinitos segmentos de reta de extremidades nos dois círculos dados e paralelos à reta  $s$ .

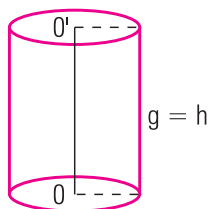


### Elementos do cilindro

- Os círculos de centro  $O$  e  $O'$  e raio  $r$  são as bases.
- Os segmentos paralelos a  $s$  com extremidades nas circunferências das bases são as geratrizes.
- A distância entre  $\alpha$  e  $\beta$ , planos das bases, é a altura.

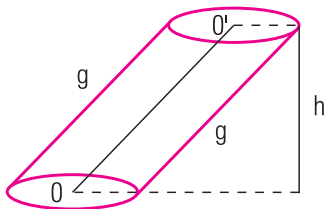
### Cilindro Reto ou de Revolução

O cilindro cujas geratrizes são perpendiculares às bases ( $g = h$ ) é chamado de cilindro reto.



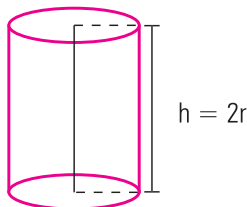
### Cilindro Obliquo

É aquele em que as geratrizes não são perpendiculares às bases.



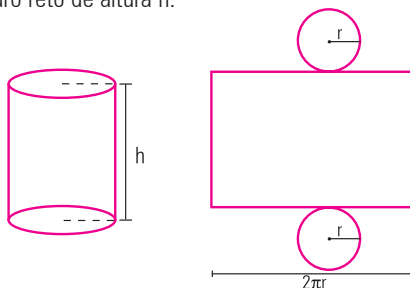
### Cilindro Equilátero

Um cilindro reto é equilátero quando a altura é igual ao dobro do raio das bases.



## Manual de Matemática

Dado o cilindro reto de altura  $h$ :



### Área total

É a soma das áreas das bases com a área lateral:

$$A_t = 2A_b + A_\ell$$

$$\text{em que: } A_b = \pi r^2$$

$$A_\ell = 2\pi r h$$

$$A_t = 2\pi r(r + h)$$

### Volume

O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base ( $A_b$ ) pela altura ( $h$ ).

$$V = \pi r^2 h$$

Exemplos:

1) Dado um cilindro reto de altura  $h = 8$  cm e raio da base 3 cm, calcule:

a) a área da base

$$A_b = \pi r^2$$

$$A_b = \pi 3^2$$

$$A_b = 9\pi \text{ cm}^2$$

b) a área lateral

$$A_\ell = 2\pi r h$$

$$A_\ell = 2\pi 3 \cdot 8$$

$$A_\ell = 48\pi \text{ cm}^2$$

c) a área total

$$A_t = 2\pi r(r + h)$$

$$A_t = 2\pi 3(3 + 8)$$

$$A_t = 66\pi \text{ cm}^2$$

d) o volume

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi 3^2 \cdot 8$$

$$V = 72 \text{ cm}^3$$

2) Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um cilindro equilátero ( $h = 2r$ ) cujo raio é igual a 4 cm.

área da base

$$A_b = \pi r^2$$

$$A_b = \pi 16$$

$$A_b = 16\pi \text{ cm}^2$$

área total

$$A_t = 2\pi r(r + h)$$

$$A_t = 2\pi 4(4 + 8)$$

$$A_t = 96\pi \text{ cm}^2$$

área lateral

$$A_l = 2\pi rh$$

$$A_l = 2\pi 4 \cdot 8$$

$$A_l = 64\pi \text{ cm}^2$$

$$h = 2r$$

$$h = 8 \text{ cm}$$

volume

$$V = \pi r^2 h$$

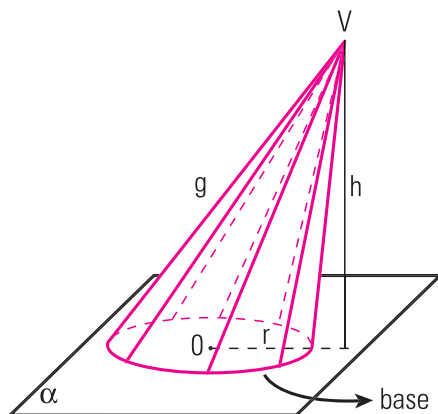
$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8$$

$$V = 128 \text{ cm}^3$$

## Cone

Cone é um sólido geométrico formado por segmentos que têm uma extremidade no V (vértice) e a outra é um ponto do círculo.

Elementos do cone

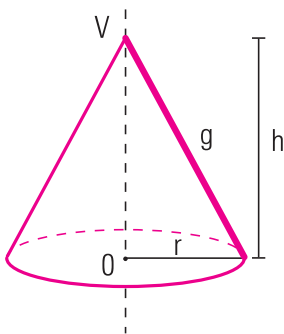


## Manual de Matemática

- $V$  é o vértice.
- A distância entre o vértice  $V$  e o plano  $\alpha$  é a altura do cone ( $h$ ).
- $\overline{OV}$  é o eixo.
- Os segmentos com uma extremidade na circunferência da base e a outra no ponto  $V$  são as geratrizes.

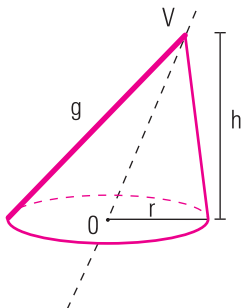
### Cone Reto

O eixo é perpendicular ao plano da base.



### Cone Obliquo

O eixo não é perpendicular ao plano da base.



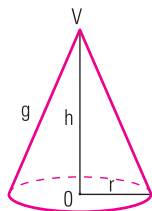
Num cone circular reto, podemos estabelecer a relação:

$$g^2 = h^2 + r^2$$



## Cone Equilátero

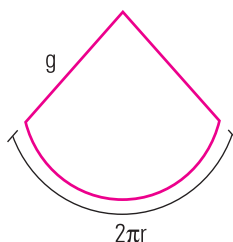
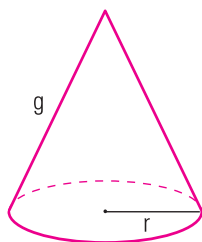
Um cone é equilátero quando a geratriz é igual ao dobro do raio da base.



$$g = 2r$$

$$h = r\sqrt{3}$$

## Área de um Cone



### Área lateral

$$A_l = \pi r g$$

### Área total

$$A_t = \pi r(r + g)$$

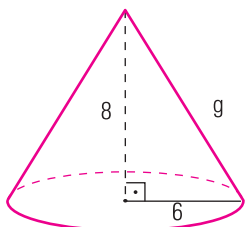
### Volume

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Exemplo:

Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um cone reto, de altura igual a 8 cm e o raio da base igual a 6 cm.

Solução:



$$\begin{aligned}g^2 &= h^2 + r^2 \\g^2 &= 8^2 + 6^2 \\g^2 &= 100 \\g &= 10\end{aligned}$$

Área da base

$$\begin{aligned}A_b &= \pi r^2 \\A_b &= \pi 6^2 \\A_b &= 36\pi \text{ cm}^2\end{aligned}$$

área total

$$\begin{aligned}A_t &= A_b + A_l \\A_t &= 36\pi + 60\pi \\A_t &= 96\pi \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Área lateral

$$\begin{aligned}A_l &= \pi r g \\A_l &= \pi \cdot 6 \cdot 10 \\A_l &= 60\pi \text{ cm}^2\end{aligned}$$

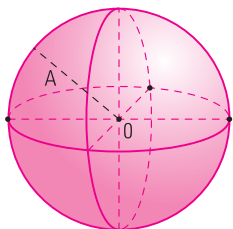
Volume

$$\begin{aligned}V &= \frac{A_b \cdot h}{3} \\V &= \frac{36\pi \cdot 8}{3} \\V &= 96\pi \text{ cm}^3\end{aligned}$$

## Esfera

Seja um ponto O (centro) e um segmento qualquer AO.  
A reunião de todos os segmentos AO é um sólido denominado esfera.

Elementos da esfera



- Centro: ponto O.
- Raio: medida de qualquer segmento AO.
- Diâmetro: intersecção com qualquer reta que corte a esfera e passe pelo seu centro.

### Área de uma esfera

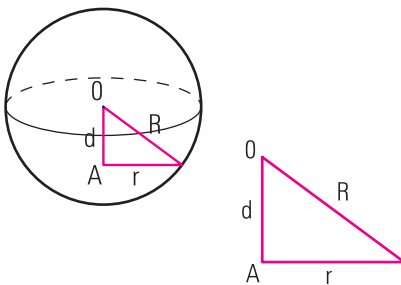
$$A = 4\pi R^2$$

### Volume de uma esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

### Secção da esfera

A intersecção da esfera e um plano é um círculo.



Em que:

$$R^2 = r^2 + d^2$$

R – raio da esfera

r – raio do círculo

d – distância do círculo ao centro da esfera.

Exemplo:

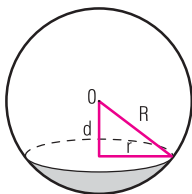
Uma secção plana feita a 4 cm do centro de uma esfera tem área igual a  $25\pi \text{ cm}^2$ . Calcule a área e o volume da superfície esférica.

Solução:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow 25\pi = \pi r^2$$

$$r^2 = 25$$

$$r = 5 \text{ cm}$$



$$R^2 = r^2 + d^2$$

$$R^2 = 5^2 + 4^2$$

$$R^2 = 25 + 16$$

$$R^2 = 41$$

$$R = \sqrt{41}$$

$$A = 4\pi R^2$$

$$A = 4\pi (\sqrt{41})^2$$

$$A = 164\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi (\sqrt{41})^3$$

$$V = \frac{164\pi\sqrt{41}\text{cm}^3}{3}$$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

### Geometria Plana

1) (UFES) O triplo do complemento de um ângulo é igual à terça parte do suplemento desse ângulo.

Esse ângulo mede:

a)  $\frac{7\pi}{8}\text{rad}$

c)  $\frac{7\pi}{4}\text{rad}$

e)  $\frac{5\pi}{8}\text{rad}$

b)  $\frac{5\pi}{16}\text{rad}$

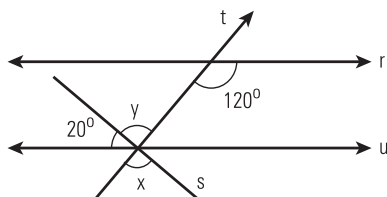
d)  $\frac{7\pi}{16}\text{rad}$

2) Determine o valor de x:

a)  $2x + 5^\circ$   $x + 25^\circ$

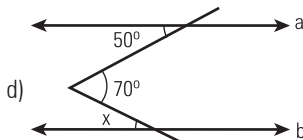
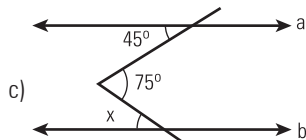
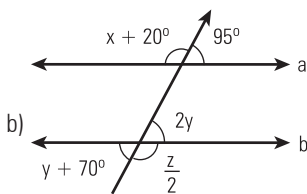
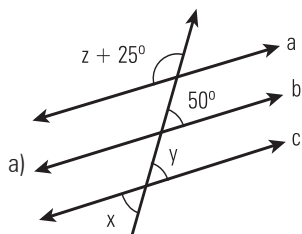
b)  $2x + 10^\circ$   $160^\circ$

3) (FGV – SP) Considere as retas  $r$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $u$ , todas num mesmo plano, com  $r \parallel u$ . O valor em graus de  $(2x + 3y)$  é:

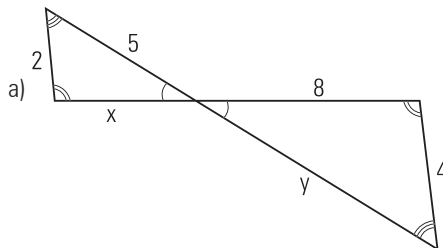


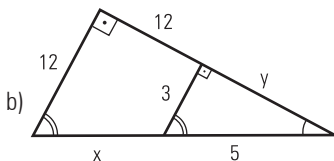
- a)  $64^\circ$
- b)  $500^\circ$
- c)  $520^\circ$
- d)  $660^\circ$
- e)  $580^\circ$

4) Sendo  $a \parallel b \parallel c$ , determine os valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

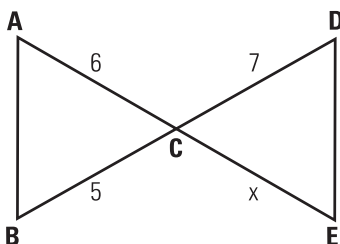


5) Determine  $x$  e  $y$  nos pares de triângulos semelhantes:



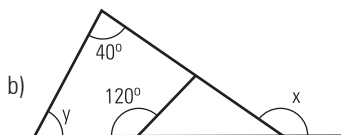
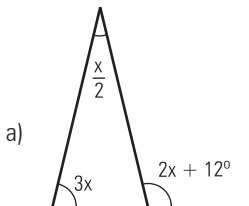


6) (EESCUSP) Na figura, AB e DE são paralelas. O valor de x é:

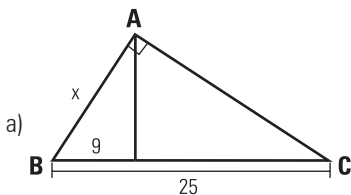


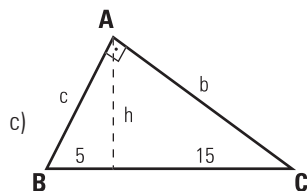
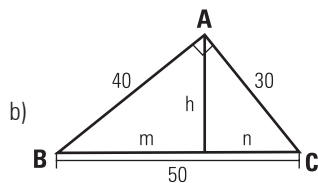
- a) 35
- b) 6
- c) impossível calcular x
- d)  $x = 3(AB)$
- e)  $\frac{35}{6}$

7) Determine o valor de x e y:

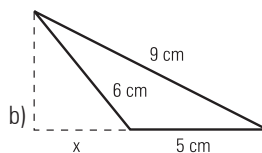
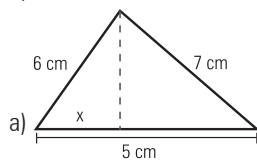


8) Calcule a medida do valor desconhecido:

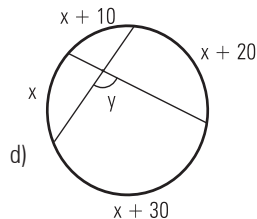
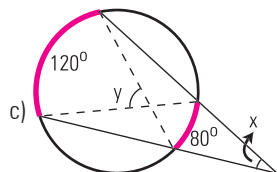
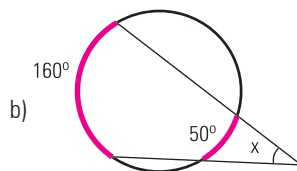
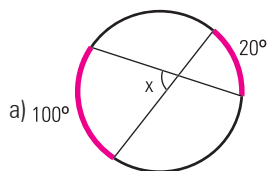




9) Calcule o valor de  $x$  nos triângulos abaixo:

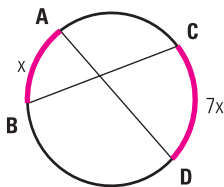


10) Determine a medida  $x$  e  $y$  indicados em cada uma das figuras:

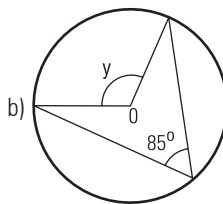
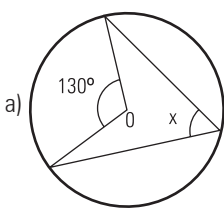


## Manual de Matemática

11) Na figura seguinte, determine em graus a medida de  $x$  do arco menor  $\widehat{AB}$ , sabendo que a medida do arco maior é igual a sete vezes a medida  $x$  do arco menor.



12) Na figura seguinte, determine a medida  $x$  e  $y$  dos ângulos abaixo:



13) Determine o lado e o apótema de um triângulo equilátero inscrito num círculo de raio  $r = 3\sqrt{3}$ .

14) Calcule a área do círculo no qual está inscrito um quadrado de área 16.

15) Determine o apótema de um hexágono regular de área  $18\sqrt{3}$ .

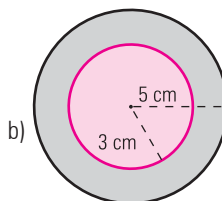
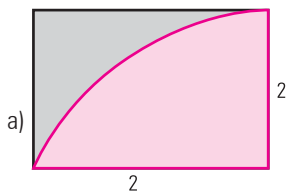
16) Calcule o perímetro de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio 5 cm.

17) Calcule as seguintes áreas:

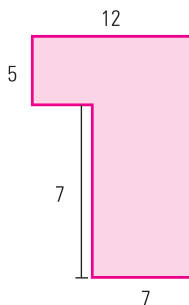
- a) de um triângulo equilátero de lado 2;
- b) retângulo de perímetro igual a 20 cm e altura 4 cm;
- c) triângulo de base 18 cm e altura igual à terça parte da base.



18) Nas figuras a seguir, calcule as áreas sombreadas:



19) (UFPR) Qual é o valor da área da figura?

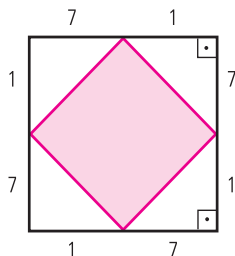


- a)  $95 \text{ m}^2$
- b)  $144 \text{ m}^2$
- c)  $169 \text{ m}^2$
- d)  $119 \text{ m}^2$
- e)  $109 \text{ m}^2$

20) A área de um terreno retangular é de  $281,25 \text{ m}^2$ . Se o lado maior do terreno excede em 25% o lado menor, então o perímetro do terreno é igual a:

- a) 67,5
- b) 71,5
- c) 75,5
- d) 79,5
- e) 83,5

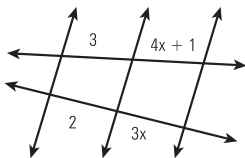
21) (PUC – SP) A área do quadrado sombreado é:



- a) 36
- b) 40
- c) 48
- d) 50

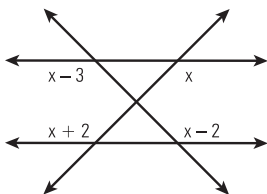
## Manual de Matemática

22) (MACK – SP) Na figura abaixo, sendo  $a/b/c$ , o valor de  $x$  é:



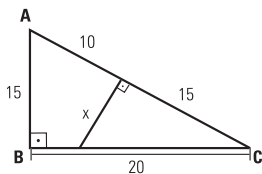
- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d)  $\frac{3}{2}$

23) (F. Objetivo – SP) Na figura abaixo, o valor de  $x$  é:



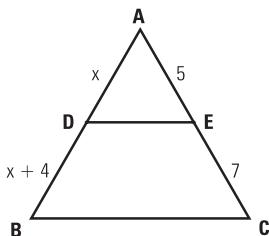
- a) 4
- b) 5
- c) 6
- d) 7

24) (MACK – SP) Na figura abaixo, a medida de  $x$  vale:



- a) 11,25
- b) 11,75
- c) 12,25
- d) 12,75

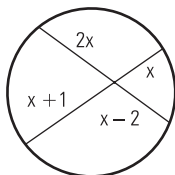
25) (FEI – SP) Na figura  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ , o valor de  $x$  é:



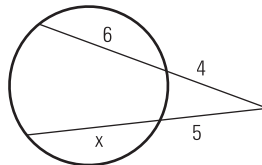
- a) 9
- b) 10
- c) 12
- d)  $\frac{15}{2}$

26) Calcule  $x$  na figuras abaixo:

a)



b)



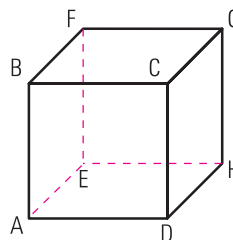
## Geometria de Posição

27) Coloque V (Verdadeiro) ou F (Falso):

- a) Uma reta possui apenas dois pontos. ( )
- b) Dois pontos distintos determinam uma única reta. ( )
- c) Três pontos quaisquer determinam um único plano. ( )
- d) Por um ponto passam infinitas retas. ( )
- e) Por um ponto passa uma única reta. ( )
- f) Um plano contém infinitas retas. ( )
- g) Três pontos distintos são sempre colineares. ( )
- h) Existe um único plano que passa por dois pontos distintos. ( )

28) Identifique no cubo dois pares de retas:

- a) paralelas;
- b) concorrentes;
- c) coplanares;
- d) reversas.



29) Assinale V (Verdadeiro) ou F (Falso):

- a) Duas retas concorrentes são perpendiculares. ( )
- b) Duas retas reversas são ortogonais. ( )
- c) Duas retas perpendiculares são coplanares. ( )

d) Se duas retas não têm ponto em comum, elas são reservas. ( )

e) Se duas retas são paralelas, elas são coplanares. ( )

30) (FUVEST – SP) Assinale a alternativa correta:

a) Se dois planos forem perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.

b) Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será paralela ao outro.

c) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.

d) Se duas retas forem ortogonais reservas, toda reta ortogonal a uma delas será paralela à outra.

e) Se duas retas forem ortogonais, toda reta paralela a uma delas será ortogonal à outra.

31) (PUC – SP) São dadas as proposições:

I – Uma reta é perpendicular a um plano quando ela é perpendicular a todas as retas desse plano.

II – Se um plano é perpendicular a outro, então ele é perpendicular a qualquer reta desse outro.

III – Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta de um é paralela ao outro.

É **correto** afirmar que:

a) I, II e III são verdadeiras.

b) I, II e III são falsas.

c) Apenas II é verdadeira.

d) Apenas III é verdadeira.

e) Apenas II e III são verdadeiras.

32) (FMU – SP) Dado um plano  $\alpha$  e duas retas distintas,  $r$  e  $s$ , tais que  $r \perp s$  e  $s \perp \alpha$ , podemos afirmar que:

a)  $r \cap s = \emptyset$ .

d)  $r // \alpha$ .

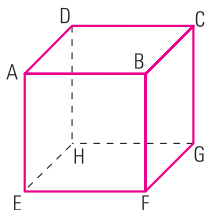
b)  $r$  e  $s$  são retas reservas.

e) n.d.a.

c)  $r // s$ .

33) (Unesp – SP) Considere o cubo da figura:

Das alternativas abaixo, aquela correspondente a pares de vértices que determinam três retas, duas a duas reservas, é:



- a) (A, D), (C, G), (E, H).
- b) (A, E), (H, G), (B, F).
- c) (A, H), (C, F), (F, H).
- d) (A, E), (B, C), (D, H).
- e) (A, D), (C, G), (E, F).

34) Dados dois planos paralelos, se um outro plano corta os dois, as intersecções são retas:

- a) reservas.
- b) perpendiculares.
- c) não são retas.
- d) concorrentes.
- e) paralelas.

### Geometria Métrica Espacial

35) Sabendo que um polígono convexo possui 20 faces e 12 vértices, qual é o número de arestas desse poliedro?

36) Determine o número de vértices de um polígono convexo que possui 3 faces triangulares, 1 face pentagonal e 2 faces quadrangulares.

37) Calcule a soma dos ângulos das faces:

- a) do hexágono regular;
- b) do octaedro regular.

38) (CESESP – PE) Sabendo-se que num poliedro convexo o número de arestas é igual ao número de vértices somado com 12, assinale a alternativa que nos dá o número de faces desse poliedro.

- a) 12
- b) 11
- c) 14
- d) 13
- e) 10

39) Num poliedro a soma das medidas dos ângulos das faces é  $1.800^\circ$ . Calcule o número de vértices desse poliedro.

## Manual de Matemática

40) Num prisma quadrangular regular, a aresta da base mede  $a = 6$  cm. Sabendo que a área lateral do prisma é  $216 \text{ cm}^2$ , calcule a medida  $h$  da altura do prisma.

41) (FAOP – SP) Calcule, em litros, o volume de uma caixa-d'água em forma de prisma reto, de aresta lateral 6 m, sabendo que a base é um losango cujas diagonais medem 7 m e 10 m.

42) Dado um paralelepípedo retângulo de dimensões 2 m, 3 m e 6 m, calcule a diagonal, área total e o volume.

43) (UFOP – MG) Uma caixa d'água, em forma de paralelepípedo retângulo, tem dimensões de 1,8 m, 15 dm e 80 cm. Sua capacidade é:

- a) 2,16 ℓ                      b) 1080 ℓ                      c) 216 ℓ  
d) 21,6 ℓ                      e) 2160 ℓ

44) (FGV – SP) Um cubo tem  $96 \text{ m}^2$  de área total. Em quanto deve ser aumentada a sua aresta para que seu volume se torne igual a  $216 \text{ m}^3$ ?

- a) 2 m                      c) 1 m                      e) 9 m  
b) 3 m                      d) 0,5 m

45) Uma pirâmide quadrangular de altura 4 m tem uma aresta da base medindo 6 m. Calcule o seu apótema, a área total e o volume:

46) (UFRS) A área total de um tetraedro regular é  $\sqrt{12}$ . A sua aresta vale:

- a) 1                      b)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$                       c)  $\sqrt{2}$                       d) 2

47) O apótema do tetraedro regular é  $4\sqrt{3}$  cm. Calcule a altura.

48) Determine a área lateral de uma pirâmide quadrada de aresta 10 cm e altura 12 cm.

49) Uma pirâmide quadrangular regular tem 4 cm de altura e 12 cm de aresta da base. Determine:

- a) medida do apótema da base.                      c) a medida da aresta lateral.  
b) medida do apótema da pirâmide.                      d) a área total da pirâmide.

50) Calcule a área total e o volume de uma pirâmide triangular regular de aresta da base 6 e aresta lateral 5.

51) Calcule a área total e o volume do cilindro de raio da base 2 e altura 5.

52) Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um cilindro de raio da base 4 cm e altura 12 cm.

53) Calcule a área total de um cilindro equilátero de volume  $250\pi$ .

54) Determine a área total e o volume de um cone reto de geratriz igual a 15 m e altura 9 m.

55) (UFPA) Um cone equilátero tem área da base  $4\pi \text{ cm}^2$ . Qual sua área lateral?

- a)  $2\pi \text{ cm}^2$                       c)  $8\pi \text{ cm}^2$                       e)  $32\pi \text{ cm}^2$   
b)  $4\pi \text{ cm}^2$                       d)  $16\pi \text{ cm}^2$

56) (MACK – SP) O volume de um cone circular reto de geratriz 5 e perímetro da base igual a  $8\pi$  é:

- a)  $75\pi$                       c)  $25\pi$                       e)  $20\pi$   
b)  $9\pi$                       d)  $16\pi$

57) Calcule a área de uma secção plana feita a 8 cm do centro de uma esfera de raio 10 cm.

58) Determine o diâmetro da esfera de área  $16\pi \text{ cm}^2$ .

### Respostas

- 1) d                      2) a)  $20^\circ$       b)  $75^\circ$                       3)  $500^\circ$  b  
4) a)  $x = 50^\circ$       b)  $x = 65^\circ$       c)  $x = 30^\circ$       d)  $x = 20^\circ$   
     $y = 50^\circ$        $y = 70^\circ$   
     $z = 105^\circ$        $z = 80^\circ$   
5) a)  $x = 4, y = 10$       b)  $x = 15, y = 4$                       6) e

- 7) a)  $x = 8$                       b)  $x = 100^\circ$                        $y = 20^\circ$
- 8) a)  $x = 15$                       b)  $h = 24$                        $m = 32$                        $n = 18$   
 c)  $h = 5\sqrt{3}$ ,  $c = 10$ ,  $b = 10\sqrt{3}$
- 9) a) 1, 2 cm                      b) 2 cm
- 10) a)  $x = 60^\circ$                       b)  $55^\circ$                       c)  $x = 20^\circ$                        $y = 100^\circ$                       d)  $\begin{cases} y = 95^\circ \\ x = 75^\circ \end{cases}$
- 11)  $45^\circ$                       12) a)  $x = 65^\circ$                       b)  $y = 170^\circ$                       13) 9
- 14) 4                      15) 3                      16)  $15\sqrt{3}$  cm
- 17) a)  $\sqrt{3}$                       b)  $24 \text{ cm}^2$                       c)  $54 \text{ cm}^2$
- 18) a)  $0,86 \text{ cm}^2$                       b)  $A = 16\pi \text{ cm}^2$
- 19)  $109 \text{ m}^2$  (e)                      20) a
- 21) d                      22) b                      23) c                      24) a                      25) b
- 26) a)  $x = 5$                       b)  $x = 3$
- 27) a) F                      b) V                      c) V                      d) V                      e) F                      f) V                      g) F                      h) F
- 28) a)  $\overline{CG}$  e  $\overline{DH}$                       c)  $\overline{BF}$  e  $\overline{DH}$   
 b)  $\overline{BF}$  e  $\overline{FE}$                       d)  $\overline{FG}$  e  $\overline{CD}$
- 29) a) F                      b) F                      c) V                      d) F                      e) V
- 30) e                      31) d                      32) d                      33) e                      34) e
- 35) 30 arestas                      36) 7 vértices                      37) a)  $2160^\circ$                       b)  $1440^\circ$
- 38) c                      39) 7 vértices                      40) 9 cm                      41) 210.000 €



42)  $d = 7 \text{ m}$ ,  $A_t = 72 \text{ m}^2$  e  $V = 36 \text{ m}^3$

43) e

44) a

45) 5 m

$A_t = 96 \text{ m}^2$

$V = 48 \text{ m}^3$

46) c

47)  $4\sqrt{2} \text{ cm}$

48)  $A_e = 260 \text{ cm}^2$

49) a) 6 cm

b)  $2\sqrt{13} \text{ cm}$

c)  $2\sqrt{22} \text{ cm}$

d)  $48(3 + \sqrt{13}) \text{ cm}^2$

50)  $A_t = 36 + 9\sqrt{3}$ ,  $V = 3\sqrt{66}$

51)  $A_t = 28\pi$ ,  $V = 20\pi$

52)  $A_b = 16\pi \text{ cm}^2$ ,  $A_t = 96\pi \text{ cm}^2$ ,  $A_l = 128\pi \text{ cm}^2$ ,  $V = 192\pi \text{ cm}^3$

53)  $A_t = 150\pi$

54)  $A_t = 324\pi \text{ m}^2$ ,  $V = 432\pi \text{ m}^3$

55) c

56) d

57)  $A = 36\pi \text{ cm}^2$

58) 4 cm