سلسلة

نسائم

الرياضيات من غير تعقيد

الهندسة
وحساب المثلثات

$\sqrt{x}$

π

الثالث الإعدادي
الفصل الدراسي الأول

مدرس الرياضيات
أ.محمود عزمي
01004273395

أ.محمود عزمي

مدرس الرياضيات & Math

المنيا - ملوي

تابعوا حلقات الشرح ع اليوتيوب : رياضيات أون لاين أ. محمود عزمي

القياس الستيني للزاوية

تعالوا نشوف كام فكرة عن النسبة

الفكرة الأولى: مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين = ٩٠°

مثال: إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٢ : ٣ أوجد قياس كل منهما.

الحل

نفرض أن قياس الزاوية الأولى ٢س

وقياس الزاوية الثانية ٣س

٢س + ٣س = ٩٠°

٥س = ٩٠°

س = ٩٠ ÷ ٥ = ١٨°

قياس الزاوية الأولى= ٢س = ٢×١٨=٣٦°

قياس الزاوية الثانية=٣س = ٣× ١٨=٥٤°

الفكرة الثانية: مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠°

مثال: إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين ٤ : ٦ أوجد قياس كل منهما.

الحل

نفرض أن قياس الزاوية الأولى ٤س

وقياس الزاوية الثانية ٦س

٤س + ٦س = ١٨٠

١٠س = ١٨٠°

س = ١٨٠ ÷ ١٠= ١٨°

قياس الزاوية الأولى= ٤س = ٤×١٨=٧٢°

قياس الزاوية الثانية=٦س = ٦× ١٨=٥٤°

شوية ملاحظات

- الدرجة (°) = ٦٠ دقيقة (′)
- الدقيقة (′) = ٦٠ ثانية (″)
- لما يقولك أوجد بالقياس الستيني معناه أنه عاوز قياس الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني يعني بعد ماتطلع الناتج على الآلة الحاسبة هتضغط مفتاح

°′″

الفكرة الثالثة: مجموع قياسات الزوايا الداخلة لأي مثلث = ١٨٠°

مثال: إذا كانت النسبة بين قياسات زاويا مثلث ٣ : ٧ : ٤ أوجد القياس الستيني لهم.

الحل

نفرض أن قياس الزاوية الأولى ٣س

وقياس الزاوية الثانية ٧س

وقياس الزاوية الثالثة = ٤س

٣س + ٧س + ٤س = ١٨٠°

١٤س = ١٨٠

س = ١٨٠ ÷ ١٤= $\frac{٩٠}{٧}$°

قياس الزاوية الأولى= ٣س = ٣× $\frac{٩٠}{٧}$

= °′″ = ١٧″ ٣٤′ ٣٨°

قياس الزاوية الثانية=٧س = ٧× $\frac{٩٠}{٧}$

= ٩٠°

قياس الزاوية الثالثة=٤س= ٤× $\frac{٩٠}{٧}$

= °′″ =٤٢″ ٢٥′ ٥١°

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحاده

النسبة المثلثية لزاوية حاده: هي النسبة بين طولي ضلعين في المثلث القائم الذي تقع فيه هذه الزاوية الحادة.

جا جـ = المقابل / الوتر (sin)

جتا جـ = المجاور / الوتر (cos)

ظا جـ = جا جـ / جتا جـ = المقابل / المجاور (tan)

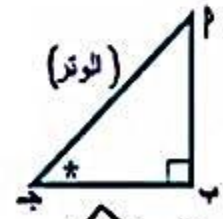
مثال ١: في الشكل المقابل أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، جـ

الحل

جا أ = ٣/٥ جا جـ = ٤/٥

جتا أ = ٤/٥ جتا جـ = ٣/٥

ظا أ = ٣/٤ ظا جـ = ٤/٣



لو الوتر مطلوب أربع و أجمع

لو الوتر موجود أربع و أطرح

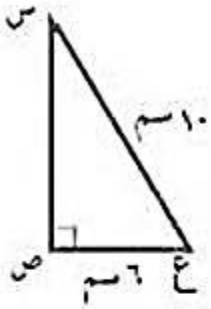
فيثاغورث

$(أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢$

$(أ ب)^٢ = (أ جـ)^٢ - (ب جـ)^٢$

$(ب جـ)^٢ = (أ جـ)^٢ - (أ ب)^٢$

تدريب:



جا س = ___

جتا س = ___

ظا س = ___

جا ع = ___

جتا ع = ___

ظا ع = ___

مساعدة :

(س ص)^٢ = ١٠^٢ – ٦^٢ = ٦٤ فيثاغورث

س ص = ٨ سم

الفكرة الأولى:

- اذا كان ق(< أ) + ق(< ب) = ٩٠° متتامتان

فإن: جا أ = جتا ب
جتا أ = جا ب

- اذا كانت س ، ص زاويتين متتامتين وكانت جا س = ٠,٧ فإن جتا ص =...

- **اختر:** في المثلث أ ب جـ القائم في ب يكون جا أ + جتا جـ = ...

٢ جا أ ٢ جتا أ ٢ جا جـ

- **اختر:** في المثلث أ ب جـ القائم في ب يكون جا أ + جتا جـ = ...

٢ جتا أ ٢ جا جـ ٢ جتا جـ

- تدريب١: أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم

أوجد : ١. ق(< أ جـ ب)

٢. ٢ ظا (< أ جـ ب) ظا (< ب أ جـ)

- تدريب٢: أ ب جـ د شبه منحرف فيه أ د ب جـ ، ق(< ب) = ٩٠ ، أ ب = ٣ سم

أ د = ٦ سم ، ب جـ = ١٠ سم ،

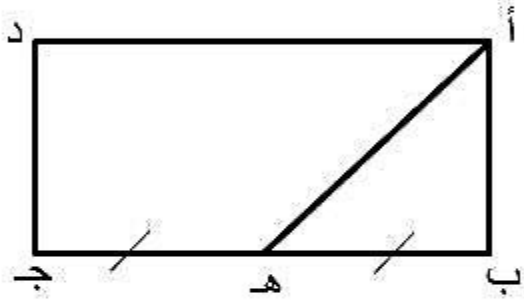
برهن أن : جتا (< د جـ ب) – ظا (< أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$

- تدريب٣: أ ب جـ د مستطيل فيه :

أ ب = ٤سم ، ب جـ = ٨سم

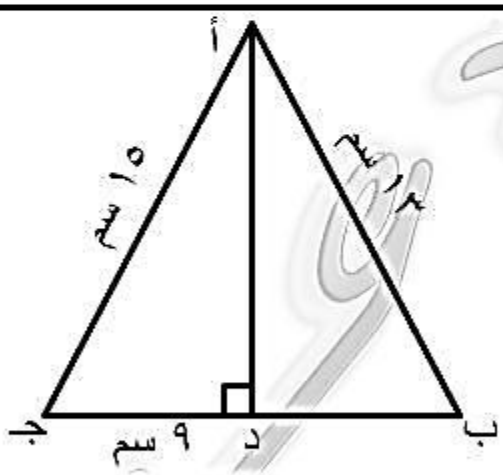
هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

أوجد قيمة ظا(< أ هـ ب) +ظا (< أ جـ د)



- تدريب٤: في الشكل المقابل :

أوجد قيمة ظا ب



- تدريب٥: أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم

$\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ يقطعه في د .

أوجد : ١. جا ب + جتا جـ ٢. جا^{٢} جـ + جتا^{٢} جـ

- **تدريب٦:** أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ جـ

أوجد النسب المثلثية للزاوية جـ .

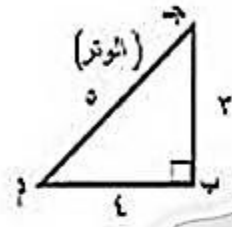
مثال ٢: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب

جا أ = ٠,٦ أوجد فيه

جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

الحل

جا أ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$



$\frac{ب جـ}{أ جـ}$ = $\frac{٣ \text{ وحدات}}{٥ \text{ وحدات}}$

من فيثاغورث

أ ب = ٤ وحدات

∴ جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

$\frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥} = ١$

النسبة المثلثية للزوايا ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥°

قياس الزاوية / النسب المثلثية	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا sin	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتا cos	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا tan	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

حاجات مهمة

- اذا كان جا هـ = جتا هـ فإن ق (< هـ) = ٤٥°
- اذا كانت النسبة بين زاويتين متتامتين هي ١ : ٢ فإن قياسيهما ٣٠° ، ٦٠°
- في المثلث القائم طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = نصف طول الوتر.

أمثلة خفيفة

- اذا كان س ، ص زاويتين متتامتين بحيث س : ص = ١ : ٢ فإن جا س + جتا ص = ...

الحل : جا ٣٠° + جتا ٦٠° = ١

- ٢ جتا ٦٠ = ...

الحل ٢ × ٠,٥ = ١

- اذا كان جتا ٢س = ٠,٥ حيث س زاوية حادة فإن س = ...

الحل : ٢س = ٦٠

س = ٣٠°

- اذا كان جا ٣س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن س= .....

الحل : ٣س = ٣٠

س= ١٠°

- اذا كان جا (س+١٠) = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن س = ...

الحل : س + ١٠ = ٣٠°

س = ٢٠°

- اذا كان جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

حيث س زاوية حادة فإن جا س =....

الحل : $\frac{س}{٢}$ = ٣٠

س = ٦٠°

جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

أمثلة متنوعة

- بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

جا^{٢} ٤٥° ظا^{٢} ٦٠° − ٢ جا^{٢} ٦٠° = صفر

الحل : $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} \times \left(\sqrt{٣}\right)^{٢} - ٢ \times \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٣ - ٢ \times \frac{٣}{٤}$

$= \frac{٣}{٢} - \frac{٣}{٢} =$ صفر

- بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن :

جتا ٦٠° = جتا^{٢} ٣٠° − جا^{٢} ٣٠°

الحل : الأيمن = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

الأيسر = جتا^{٢} ٣٠° − جا^{٢} ٣٠° = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$

$= \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ = الأيســر

- بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد القيمة العددية للمقدار :

ظا^{٢} ٦٠° − ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥°

الحل : $\left(\sqrt{٣}\right)^{٢} - ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$= ٣ - ٢ \times \frac{١}{٢}$

٣ − ١ = ٢

- أوجد قيمة س اذا كان:

$٤س = جتا^{٢} ٣٠^{\circ} ظا^{٢} ٣٠^{\circ} ظا^{٢} ٤٥^{\circ}$

الحل: $٤س = (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} \times (\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٢} \times ١^{٢}$

$٤س = \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٣} \times ١$

$٤س = \frac{١}{٤}$ ..... $س = \frac{١}{١٦}$

- أوجد قيمة س اذا كان:

$٢جاس = ظا^{٢} ٦٠^{\circ} - ٢ ظا ٤٥^{\circ}$ حيث س زاوية حاده

$٢جاس = (\sqrt{٣})^{٢} - ٢ \times ١$

$٢جاس = ٣ - ٢$

$٢جاس = ١$ ..... $جاس = \frac{١}{٢}$

$س = ٣٠^{\circ}$

- أوجد قيمة هـ اذا كان:

$جا^{٢} ٤٥^{\circ} = جتا هـ ظا ٣٠^{\circ}$ حيث هـ زاوية حادة

$(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} = جتا هـ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$جتا هـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ..... $هـ = ٣٠^{\circ}$

البعـــــد بين نقطتين

- اذا كانت أ (س ، ص)
، ب (س ، ص)

فإن طول $\overline{أ ب}$

$= \sqrt{(ص_٢ - ص_١)^٢ + (س_٢ - س_١)^٢}$

مثال ١: اذا كا ن أ (٢ ، -١) ،
ب (٥ ، ٣) فإن أ ب = ... وحدة طول

الحل :

أ ب $= \sqrt{(-١ - ٣)^٢ + (٢ - ٥)^٢}$

$= \sqrt{(-٤)^٢ + (-٣)^٢}$

$= \sqrt{١٦ + ٩} = ٥$ وحدة طول

مثال ٢ : اذا كان بعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦ ، ١) يساوي $٢\sqrt{٥}$ وحدة طول أوجد قيمة س

الحل

$\sqrt{(س - ٦)^٢ + (٥ - ١)^٢} = ٢\sqrt{٥}$

بتربيع الطرفين: $(س - ٦)^٢ + ٤^٢ = ٢٠$

$(س - ٦)^٢ = ٢٠ - ١٦$

ناخذ جذر الطرفين : $س - ٦ = \sqrt{٤}$

$س - ٦ = \pm ٢$

س = ٨ أو س = ٤

تطبيقات هندسية

الفكرة الأولى: تحديد نوع المثلث بالنسبة لأطوال أضلاعه .

فكرة الحل: نحسب أطوال أضلاع المثلث الثلاثة من قانون البعد وبعدها نحدد نوعه : **مختلف الأضلاع – متساوي الساقين – متساوي الأضلاع.**

مثال: اثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط أ (١ ، -٢) ، ب (-٤ ، ٢) جـ (١ ، ٦) متساوي الساقين.

الحل :

أ ب $= \sqrt{(١ + ٤)^٢ + (-٢ - ٢)^٢}$

$= \sqrt{٤١}$ وحدة طول

ب جـ $= \sqrt{(-٤ - ١)^٢ + (٢ - ٦)^٢}$

$= \sqrt{٤١}$ وحدة طول

أ جـ $= \sqrt{(١ - ١)^٢ + (-٢ - ٦)^٢}$

= ٨ وحدة طول

بما أن: أ ب = ب جـ

اذن: المثلث أ ب جـ متساوي الساقين

تدريب:

بين نوع المثلث الذي رؤوسه أ (٣ ، ٣) ، ب (١ ، ٥) ، جـ (١ ، ٣) بالنسبة لأطوال أضلاعه

ملاحظات هامة

- **بعد النقطة (-٣ ، ٥) عن محور الصادات = ٣ وحدات .**
- **بعد النقطة (-٣ ، ٥) عن محور السينات = ٥ وحدات.**

الفكرة الثانية: اثبات الشكل متوازي أضلاع .

فكرة الحل : نحسب أطوال الأضلاع الأربعه للشكل نجد أن كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول فينتج أن الشكل متوازي أضلاع.

مثال: أ ب جـ د شكل رباعي حيث أ (-١ ، ١) ، ب (٠ ، ٥) ، جـ (٥ ، ٦) ، د (٤ ، ٢)

الحل :

أ ب = $\sqrt{(-١ - ٠)^{٢} + (١ - ٥)^{٢}}$

= $\sqrt{١٧}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(٠ - ٥)^{٢} + (٥ - ٦)^{٢}}$

= $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول

جـ د = $\sqrt{(٥ - ٤)^{٢} + (٦ - ٢)^{٢}}$

= $\sqrt{١٧}$ وحدة طول

أ د = $\sqrt{(-١ - ٤)^{٢} + (١ - ٢)^{٢}}$

= $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول

بم أن : أ ب = جـ د ، ب جـ = أ د

- كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول.

اذن : الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

الفكرة الثالثة: اثبات الشكل أ ب جـ د مستطيل.

فكرة الحل : - أولا: نثبت أن الشكل متوازي أضلاع بنفس الطريقه السابقه.

- ثانيا : نثبت أن القطران أ جـ ، ب د متساويان في الطول باستخدام قانون البعد .فينتج أن الشكل مستطيل.

الفكرة الرابعة: اثبات الشكل أ ب جـ د معين.

فكرة الحل : - نحسب أطوال الأضلاع الأربعة للشكل باستخدام قانون البعد. نجد أن أضلاعه الأربعة متساوية في الطول فيكون الشكل معين .

الفكرة الخامسة: اثبات الشكل أ ب جـ د مربع.

فكرة الحل : - أولا: هنثبت أن الشكل معين بنفس الفكرة السابقة.

- ثانيا : هنثبت أن القطران أ جـ ، ب د متساويان في الطول باستخدام قانون البعد. فيكون الشكل يمثل مربع.

الفكرة السادسة: التعرف على نوع المثلث بالنسبة لقياسات زواياه.

فكرة الحل : - أولا: نحسب أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث بإستخدام قانون البعد.

ثانيا:اذا كان :

(أكبر ضلع)^{٢} = (الضلع)^{٢} + (الضلع)^{٢}

يكون المثلث قائم الزاوية.

- اذا كان :

(أكبر ضلع)^{٢} > (الضلع)^{٢} + (الضلع)^{٢}

يكون المثلث منفرج الزاوية.

- اذا كان :

(أكبر ضلع)^{٢} < (الضلع)^{٢} + (الضلع)^{٢}

يكون المثلث حاد الزوايا.

الفكرة السابعة: اثبات أن النقاط أ ، ب ، جـ تقع على دائرة واحدة مركزها م.

فكرة الحل :

نثبت أن أ م = ب م = جـ م = نق

مثال : اثبت أن النقاط أ(٣ ، -١) ب (-٤ ، ٦) ، جـ (٢ ، -٢) تقع على دائرة مركزها م (-١ ، ٢) ثم احسب محيط الدائرة ومساحتها

π = ٣,١٤

الحل

أ م = $\sqrt{(٣+١)^{٢} + (-١-٢)^{٢}}$

= ٥ وحدة طول

ب م = $\sqrt{(-٤+١)^{٢} + (٦-٢)^{٢}}$

= ٥ وحدة طول

جـ م = $\sqrt{(٢+١)^{٢} + (-٢-٢)^{٢}}$

= ٥ وحدة طول

اذن أ م = ب م = جـ م = ٥ = نق

محيط الدائرة = ٢ π نق

=٢× ٥ × ٣,١٤ = ٣١,٤ وحدة طول

مساحة الدائرة = π نق^{٢}

= ٣,١٤ × ٥ × ٥

= ٧٨,٥ وحدة مربعة

الفكرة الثامنة: اثبات أن النقاط أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة.

فكرة الحل:- نحسب أطوال أ ب ، ب جـ ، أ جـ .

اذا كان مجموع أصغر جزأين يساوي الجزءالأكبر تكون النقاط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

تدريب: اثبات أن النقاط أ (٣ ، ٥) ، ب (٥ ، ٧)، جـ (٠ ، ٢) تقع على استقامة واحدة.

تدريب: اثبت أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية ثم أوجد مساحته حيث أ(٣ ، ٢) ، ب (-٤ ، ١) ، جـ (٢ ، -١)

مساعدة : مساحة المثلث القائم= نصف حاصل ضرب ضلعي القائمة .

ملحوظة : بعد النقطة (س ،ص) عن نقطة الأصل = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

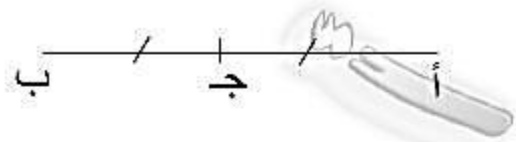
تدريب: اثبت أن النقاط أ (-١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٦ ، ٤) د (٠ ، ٦) هي رؤوس مستطيل ثم أوجد مساحته .

تدريب: اثبت أن النقاط أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، -٣) ، جـ (-١ ، -٢) د (-٢، ٣) هي رؤوس معين ثم أوجد مساحته.

مساعدة: مساحة المعين = نصف حاصل ضرب طولا قطريه.

تدريب: اثبت أن النقاط أ (٢ ، ٤) ، ب (-٣ ، ٠) ، جـ (-٧ ، ٥) د (-٢، ٩) هي رؤوس مربع ثم أوجد مساحته.

احداثيا منتصف قطعة مستقيمة



اذا كان أ ($س_1$ ، $ص_1$) ،ب ($س_2$ ، $ص_2$)

جـ تنصف $\overline{أ ب}$ فإن احداثيي نقطة جـ :

$$جـ = \left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$$

مثال١ : اذا كانت أ (٣ ، ٦) ، ب (-١ ، ٢) أوجد منتصف $\overline{أ ب}$

الحل : المنتصف = $\left(\frac{3-1}{2} ، \frac{6+2}{2}\right)$

= (١ ، ٤)

مثال٢ : اذا كان $\overline{أ ب}$ قطرا في الدائرة م حيث أ (٤ ، -١) ، ب (-٢ ، ٧) أوجد احداثيي مركز الدائرة م ثم احسب محيطها .

الحل : م = $\left(\frac{4-2}{2} ، \frac{-1+7}{2}\right)$

= (١ ، ٣)

أ م = نق

= $\sqrt{(4-1)^2 + (-1-3)^2}$

= ٥ وحدة طول

المحيط = ٢ × ٥ × ٣,١٤

= ٣١,٤ وحدة طول

مثال ٣ : اذا كانت النقطة (٣ ، ١) هي منتصف البعد بين النقطتين (١ ، ص) ، (س ، ٣) . أوجد قيمتي س ، ص.

الحل

$$\left(\frac{1+س}{2} ، \frac{ص+3}{2}\right) = (3 ، 1)$$

$\frac{1+س}{2} = 3$

١ + س = ٣ × ٢

١ + س = ٦

س = ٦ − ١

س = ٥

$\frac{ص+3}{2} = 1$

ص + ٣ = ٢ × ١

ص + ٣ = ٢

ص = ٢ - ٣

ص = -١

أفكار هندسية

اثبات أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع.

فكرة الحل : نثبت أن منتصف القطر $\overline{أ جـ}$ = منتصف القطر $\overline{ب د}$

مثال ٤ : برهن أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع حيث أ (٥ ، ٣) ب (٦ ، -٢) ، جـ (١ ، -١) ، د (٠ ، ٤)

الحل

منتصف $\overline{أ جـ}$ = $\left(\frac{5+1}{2} ، \frac{3-1}{2}\right)$

= (٣ ، ١)

منتصف $\overline{ب د}$ = $\left(\frac{6+0}{2} ، \frac{-2+4}{2}\right)$

= (٣ ، ١)

اذن : القطران ينصف كل منهما الاخر

اذن الشكل متوازي أضلاع

مثال ٥: أ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في هـ حيث أ (٣ ، ١) ب (٦ ، ٢) ، جـ (١ ، ٧) أوجد احداثيي نقطتي هـ ، د

الحل

هـ منتصف $\overline{أ جـ}$ = $\left(\frac{٣+١}{٢} ، \frac{١+٧}{٢}\right)$

= (٢ ، ٤)

بفرض د = (س ، ص)

بم أن منتصف $\overline{ب د}$ = (٢ ، ٤)

$\left(\frac{٦+س}{٢} ، \frac{٢+ص}{٢}\right)$ = (٢ ، ٤)

$\frac{٦+س}{٢}$ = ٢

٦+ س = ٢×٢

٦+ س = ٤

س = ٤ – ٦

س = -٢

$\frac{٢+ص}{٢}$ = ٤

٢+ ص = ٤ × ٢

٢ + ص = ٨

ص = ٨ – ٢

ص = ٦

د = (-٢ ، ٦)

مثال ٦: اذا كانت النقطة جـ (٦ ، -٤) هي منتصف أ ب حيث أ (٥ ، -٣) أوجد احداثيي نقطة ب.

الحل

بفرض أن ب = (س ، ص)

$\left(\frac{٥+س}{٢} ، \frac{-٣+ص}{٢}\right)$ = (٦ ، -٤)

$\frac{٥+س}{٢}$ = ٦

٥+ س =١٢

س = ٧

$\frac{-٣+ص}{٢}$ = -٤

-٣ + ص = -٨

ص = -٥

ب =(٧ ، -٥)

مثال ٧: اثبت أن النقاط أ (-١ ، ٤) ب (٣ ، ١) ، جـ (-٥ ، ١) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين ثم أوجد مساحته .

الحل

أ ب = $\sqrt{(-١ -٣)^٢ + (٤ -١)^٢}$

= ٥ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(٣ + ٥)^٢ + (١ - ١)^٢}$

= ٨ وحدة طول

أ جـ = $\sqrt{(-١ + ٥)^٢ + (٤ -١)^٢}$

= ٥ وحدة طول

بم أن : أ ب = أ جـ

اذن : المثلث متساوي الساقين قاعدته $\overline{ب جـ}$

(د)منتصف $\overline{ب جـ}$ = $\left(\frac{٣-٥}{٢} ، \frac{١+١}{٢}\right)$

= (-١ ، ١)

أ د (الارتفاع)

= $\sqrt{(-١ + ١)^٢ + (٤ - ١)^٢}$

= ٣ وحدة طول

مـ المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٣

= ١٢ وحدة مربعة

تدريب: أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٨) ، جـ (٩ ، ١٠) ، د (٧ ، ص) ، أوجد قيمة ص .

ميل الخط المستقيم

بدلالة < هـ

بدلالة معادلة المستقيم

بدلالة نقطتين

أولا: حساب الميل بدلالة الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (< هـ) :

الميل = ظا هـ

مثال١ : ميل المستقيم الذي يصنع مع الاجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° = ١

ثانيا: حساب الميل بدلالة معادلة المستقيم:

١ .المعادلة الغير مفصولة (كل المعادلة في الطرف الأيمن بينما الطرف الأيسر يساوي صفر):أس + ب ص +جـ = ٠

$$\text{الميل} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$$

مثال٢ : المستقيم الذي معادلته ٣س = ٥ص - ٤ ميله = ...

الحل : نصفر المعادلة (نجعل الطرف الأيسر صفر)

فتكون ٣س – ٥ص + ٤ = ٠

$$\text{الميل} = \frac{-٣}{-٥} = \frac{٣}{٥}$$

٢ .اذا كانت المعادلة على الصورة العامه :ص= م س + جـ

الميل = معامل س

ثالثا: حساب الميل بدلالة نقطتين على المستقيم:

$$\text{الميل} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

مثال ٣: ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، -٢) ، (٥ ، ١) = ...

$$\text{الميل} = \frac{-٢-١}{٣-٥} = \frac{٣}{٢}$$

مثال ٤: المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، -١) ، (٤ ، ٤) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها .....

$$\text{الحل : الميل} = \frac{٤+١}{٤+١} = ١$$

ظا هـ = الميل = ١

Shift + tan ١ = ٤٥°

اذن قياس الزاوية = ٤٥°

شوية ملاحظات

- **ميل المستقيم الموازي لمحور السينات (العمودي على الصادات) = صفر**
  أي أن البسط = صفر
- **ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات (العمودي على السينات) غير معرف**
  أي أن المقام = صفر

الفكرة الأولى: المستقيمان المتوازيان متساويان في الميل.

مثال ٥: اذا كان المستقيمان ٦س+ك ص+ ٣=٠ ، ٣س- ص+٢=٠ متوازيين أوجد قيمة ك .

الحل : المستقيمان متوازيان.

اذن $م_١ = م_٢$

$$\frac{-٦}{ك} = \frac{-٣}{-١}$$

اللي متوصل بـ ك نضعه في المقام

$$ك = \frac{-٦ \times -١}{-٣} = ٢$$

مثال ٦: اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -١) ، (٦ ، ٣) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

الحل : $م_١ = \frac{٣+١}{٦-٢} = ١$

$م_٢ = ظا ٤٥° = ١$

$\because م_١ = م_٢$

$\therefore$ المستقيمان متوازيان

الفكرة الثانية: المستقيمان المتعامدان حاصل ضرب ميلاهما = -١

اذا كان: $ل_١ \perp ل_٢$

وكان $م_١ = \frac{١}{٢}$

فإن $م_٢ = -٢$

نقلب ونغير الاشارة.

مثال ٧ : أوجد ميل المستقيم العمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، -٢) ، (٥ ، ١)

الحل :

ميل المستقيم الأول = $\frac{١+٢}{٥-٣} = \frac{٣}{٢}$

ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-٢}{٣}$

(نقلب ونغير الإشارة)

مثال ٨ : اذا كان المستقيم أ س – ٢ ص + ٤ = ٠ عموديا على المستقيم ٢س – ٣ص + ٧ = ٠ أوجد قيمة أ .

الحل : $م_١ = \frac{-أ}{-٢} = \frac{أ}{٢}$

$م_٢ = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

المستقيمان متعامدان

نقلب أحدهما ونغير الاشارة ⟵ $\frac{-٣}{٢}$

$$\frac{أ}{٢} = \frac{-٣}{٢}$$

اللي متوصل بـ أ نضعه في المقام

$$أ = \frac{-٣ \times ٢}{٢} = -٣$$

تدريب: اذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° أوجد قيمة ك عندما يكون $ل_١$ ، $ل_٢$

١ . متوازيين ٢ . متعامدين

تطبيقات هندسية على الميل

مثال ٩ : باستخدام الميل اثبت أن المثلث الذي رؤوسه س (٣ ، ٥) ص (٤ ، ٢) ، ع (-٥ ، -١) قائم الزاوية في ص ، ثم أوجد احداثيي نقطة ل التي تجعل الشكل مستطيلا.

الحل : الفكرة : نثبت أن ضلعي القائمة $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$ متعامدان باستخدام الميل .

ميل $\overline{\text{س ص}}$ = $\frac{٥-٢}{٣-٤}$ = $\frac{٣}{-١}$ = -٣

ميل $\overline{\text{ص ع}}$ = $\frac{٢+١}{٥+٤}$ = $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{١}{٣}$

$م_١ \times م_٢$ = -٣ × $\frac{١}{٣}$ = -١

وعندما يكون الشكل مستطيلا يكون القطران $\overline{\text{س ع}}$ ، $\overline{\text{ص ل}}$ ينصف كل منهما الاخر.

منتصف $\overline{\text{س ع}}$ = $\left(\frac{٣-٥}{٢} ، \frac{٥-١}{٢}\right)$

= (-١ ، ٢)

وبفرض نقطة ل (أ ، ب)

منتصف $\overline{\text{ص ل}}$ = $\left(\frac{٤+أ}{٢} ، \frac{٢+ب}{٢}\right)$

$\left(\frac{٤+أ}{٢} ، \frac{٢+ب}{٢}\right)$ = (-١ ، ٢)

$\frac{٤+أ}{٢}$ = -١ ← ×

٤ + أ = -٢ ← أ = -٦

$\frac{٢+ب}{٢}$ = ٢ ← ٢ + ب = ٤ ← ب = ٢ ← ×

ل = (-٦ ، ٢)

مثال ١٠ : باستخدام الميل اثبت أن النقط أ(-١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) جـ (٦ ، ٤) ، د (٠ ، ٦) هي رؤوس مستطيل .

الحل :

∴ ميل $\overline{\text{أب}}$ = $\frac{١-٣}{٥+١}$ = $\frac{-١}{٣}$

ميل $\overline{\text{جـ د}}$ = $\frac{٤-٦}{٦-٠}$ = $\frac{-١}{٣}$

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ متوازيان

ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\frac{١-٤}{٥-٦}$ = ٣

ميل $\overline{\text{أ د}}$ = $\frac{٣-٦}{٠+١}$ = ٣

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ متوازيان

∵ كل ضلعين متقابلين متوازيين

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

ميل $\overline{\text{أ ب}}$ × ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\frac{-١}{٣}$ × ٣ = -١

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$

∴ الشكل أ ب جـ د مستطيل

تدريب: اذا كان المثلث الذي رؤوسه ص (٤ ، ٢) ، س (٣ ، ٥) ، ع (-٥ ، أ) قائم الزاوية في ص . أوجد قيمة أ .

الحل : ميلا ضلعا القائمة المتعامدان

ميل $\overline{\text{س ص}}$ = -٣

متعامدان : نقلب أحدهما ونغير الاشارة $\frac{١}{٣}$

ميل $\overline{\text{ص ع}}$ = $\frac{٢-أ}{-٩}$

$\frac{٢-أ}{-٩}$ = $\frac{١}{٣}$ ..... أكمل

مثال ١١: باستخدام الميل اثبت أن النقاط أ (١ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (٠ ، -١) تقع على استقامة واحدة.

الحل:

ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = $\frac{٣-١}{٢-١}$ = ٢

ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\frac{٣+١}{٢-٠}$ = ٢

ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ ويشتركان في ب

أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

معادلة الخط المستقيم

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم

هي: ص = م س + جـ

حيث م : ميل الخط المستقيم.

جـ :الجزء المقطوع من محور الصادات.

الفكرة الأولى: ايجاد المعادلة بدلالة الميل والجزء المقطوع.

مثال ١: أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٢ ويقطع من الاتجاه السالب لمحور الصادات جزء مقداره ٣ وحدات.

الحل: م = ٢ ، جـ = -٣

المعادله هي: ص = ٢س – ٣

- معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، -٣) هي: ص = -٣.
- معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (٢ ، ٧) هي : س = ٢.
- معادلة المستقيم الذي ميله م ويمر بنقطة الأصل هي: ص = م س .

مثال ٢: مستقيم ميله $\frac{٢}{٣}$ ويقطع جزءا موجبا من محور الصادات طوله وحدتان. أوجد معادلته ونقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات.

الحل : م = $\frac{٢}{٣}$ ، جـ = ٢

المعادلة : ص = $\frac{٢}{٣}$س + ٢

نضع ص = ٠ ⟵ $\frac{٢}{٣}$س + ٢ = ٠

$\frac{٢}{٣}$ س = -٢

س = -٢ × $\frac{٣}{٢}$

س = -٣ ⟵ النقطة هي (-٣ ، ٠)

الفكرة الثانية: ايجاد المعادلة بدلالة الميل ونقطة واقعة على المستقيم.

فكرة الحل: نضع الميل في المعادلة ثم نعوض بالنقطة لإيجاد قيمة جـ .

مثال ٣: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٢) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° .

الحل: الميل = ظا ٤٥° = ١

المعادلة هي : ص = م س + جـ

بينما م = ١

ص= س + جـ

لايجاد قيمة جـ نعوض بالمعادلة عن النقطة (٣ ، ٢)حيث س= ٣ ، ص = ٢

٢ = ٣+ جـ

جـ = ٢ -٣

جـ = -١

المعادلة هي : ص = س -١

مثال ٤: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، - ٥) ويوازي المستقيم س + ٢ص -٧ = ٠

الحل: ميل المستقيم المعطى

$$= \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{٢}$$

ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-١}{٢}$

المعادلة هي : ص = $\frac{-١}{٢}$ س + جـ

بالتعويض بالنقطة (٣ ، -٥)

-٥ = $\frac{-١}{٢}$ × ٣ + جـ

-٥ = $\frac{-٣}{٢}$ + جـ

جـ = $\frac{-٧}{٢}$

المعادلة هي : ص = $\frac{-١}{٢}$ س - $\frac{٧}{٢}$

تدريب: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) وعموديا على المستقيم الذي معادلته

٥س -٢ص + ٧ = ٠

الحل: ميل المستقيم المعطى = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

$$= \frac{-٥}{-٢} = \frac{٥}{٢}$$

ميل المستقيم المطلوب نقلب ونغير الاشارة = $\frac{-٢}{٥}$

..... أكمل الحل

الفكرة الثالثة : ايجاد المعادلة بدلالة نقطتين على المستقيم.

فكرة الحل : - نحسب الميل من القانون

$$م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

- نعوض بنقطة من الاثنين لإيجاد قيمة جـ .

مثال ٥: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين(٤ ، ٣) ، (٠ ، ٥)

الحل

$$م = \frac{٣-٥}{٤-٠} = \frac{-١}{٢}$$

المعادلة : ص = $\frac{-١}{٢}$ س + جـ

بالتعويض بالنقطة (٠ ، ٥)

٥ = ٠ + جـ

جـ = ٥

المعادلة هي : ص = $\frac{-١}{٢}$ س + ٥

تدريب: أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحورين السيني والصادي جزءين موجبين ٤ ، ٩ وحدة طول على الترتيب.

مساعدة : المستقيم يمر بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٩)

..... أكمل الحل

مثال ٦: أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (١ ، ٣) وعمودي على المستقيم المار بالنقطتين (-٣ ، ٤) ، (٣ ، -٢)

الحل :

ميل المستقيم المعطى = $\frac{٢+٤}{-٣-٣}$ = -١

ميل المستقيم المطلوب نقلب ونغير الاشارة = ١

المعادلة : ص= م س + جـ

م = ١

المعادلة : ص = س + جـ

بالتعويض بالنقطة (١ ، ٣) لإيجاد قيمة الـ جـ

٣ = ١ + جـ

جـ = ٣ – ١

جـ = ٢

المعادله هي : ص = س + ٢

تدريب: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (-١ ، -٣) ثم اثبت أنه يمر بنقطة الأصل .

أكمل : المستقيم الذي معادلته ٢س -٣ص -٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءا طوله .....

الجواب : وحدتان

مثال ٧: أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته : $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٣} = ١$

الحل : بضرب المعادلة × ٣

$\frac{٣}{٢}$ س + ص = ٣

ص = - $\frac{٣}{٢}$ س + ٣

الميل = - $\frac{٣}{٢}$

المستقيم يقطع من محور الصادات جزءا موجبا مقداره ٣ وحدات

تدريب: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٦) ومنتصف أ ب حيث أ (١ ، -٢) ، ب (٣ ، -٤)

ذاكر....

اجتهد....

اطلب التوفيق من الله....

أسألكم الدعاء لوالدي

بالرحمة والمغفرة

أ.محمود عزمي
ملوي المنيا
٠١٠٠٤٢٧٣٣٩٥

مدرس الرياضيات والـ Math
أ.محمود عزمي
01004273395