

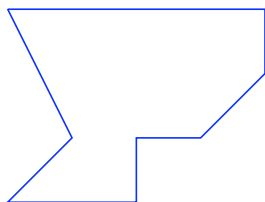
# Teselaciones<sup>\*</sup>

Federico Ardila<sup>\*\*</sup>

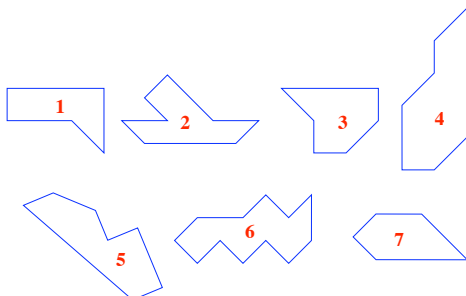
Richard Stanley<sup>\*\*\*</sup>

## 1. Introducción.

Consideremos el siguiente rompecabezas. El objetivo es cubrir la región

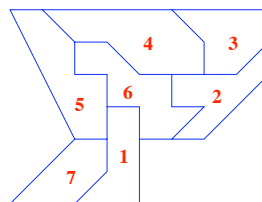


usando las siguientes siete figuras.



La región debe cubrirse completamente sin ninguna sobreposición. Se permite desplazar o rotar las 7 figuras de cualquier forma, pero cada pieza debe ser usada exactamente una vez.

Uno podría comenzar observando que algunas de las figuras encajan bien en ciertas partes de la región. Sin embargo, la solución sólo puede hallarse por ensayo y error.



Por esta razón, aunque este es un rompecabezas divertido, no es muy interesante matemáticamente.

Este es un ejemplo de un problema de teselación. Una teselación es un recubrimiento de una región dada usando un conjunto de figuras dado, sin sobreposición alguna. Por supuesto, enfocaremos nuestra atención en regiones y figuras específicas que nos llevarán a problemas matemáticos interesantes.

Dada una región y un conjunto de figuras, existen muchas preguntas que podemos hacernos. Algunas de las preguntas que trataremos son las siguientes:

- ¿Existe una teselación?
- ¿Cuántas teselaciones existen?
- ¿Cuántas teselaciones existen aproximadamente?
- ¿Es fácil hallar una teselación?
- ¿Es fácil probar que no existe una teselación?
- ¿Es fácil convencer a alguien de que no existe una teselación?

<sup>\*</sup>Este artículo está basado en la Clay Public Lecture dictada por el segundo autor en julio de 2004, en el marco del IAS/Park City Mathematics Institute. Traducción: Carolina Benedetti, Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia.

<sup>\*\*</sup>Financiado parcialmente por el proyecto #DMS-0801075 de la National Science Foundation y por el Clay Mathematics Institute.

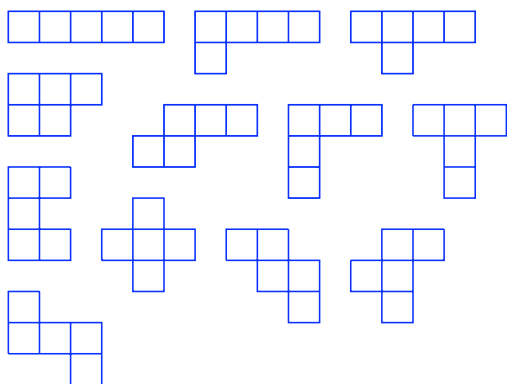
<sup>\*\*\*</sup>Financiado parcialmente por el proyecto #DMS-9988459 de la National Science Foundation, y por el Clay Mathematics Institute como un Senior Scholar en el IAS/Park City Mathematics Institute.



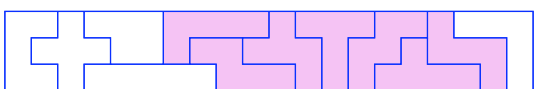
- ¿Cómo es una teselación “típica”?
- ¿Existen relaciones entre las diferentes teselaciones?
- ¿Es posible encontrar una teselación con propiedades especiales, tales como ciertos tipos de simetría?

## 2. ¿Existe una teselación?

Al observar el conjunto de figuras y la región que queremos cubrir, no siempre es claro cuando dicha tarea es posible. El rompecabezas de la Sección 1 ejemplifica esa situación. Consideremos un rompecabezas similar, donde el conjunto de figuras es más interesante matemáticamente.



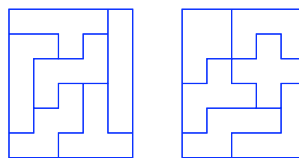
Un *pentominó* es una colección de cinco cuadrados unitarios, unidos con lados coincidentes. Los pentominós se pueden trasladar, rotar, o voltear libremente. La figura muestra los doce pentominós diferentes. Como su área total es 60, podemos preguntarnos, por ejemplo: ¿Es posible teselar un rectángulo de  $3 \times 20$  usando cada uno de ellos una vez exactamente?



Este rompecabezas se puede resolver por lo menos de dos maneras. Una solución se muestra arriba. Una solución diferente se obtiene

si rotamos la región sombreada  $180^\circ$ . De hecho, después de un tiempo tratando de hallar una teselación, uno descubre que estas (junto con sus rotaciones y reflexiones) son las únicas dos soluciones posibles.

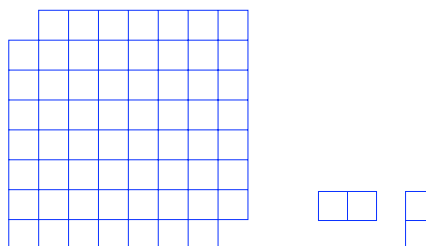
Uno también podría preguntarse si es posible teselar dos rectángulos de  $6 \times 5$  usando cada pentominó exactamente una vez. Una forma de hacerlo se muestra abajo. Existe una sola teselación posible distinta de ésta, que se obtiene reacomodando dos de los pentominós; es un buen acertijo para el lector encontrar esas dos figuras.



Sabiendo eso, uno podría suponer que existen varias teselaciones de un rectángulo de  $6 \times 10$  usando los doce pentominós. No obstante, es difícil predecir cuántas existen. Una búsqueda computacional exhaustiva encontró que hay 2339 teselaciones de ese tipo.

Estas preguntas sugieren rompecabezas llamativos, pero no son la clase de problemas matemáticos interesantes que estamos buscando. Para ilustrar lo que queremos decir, consideremos un problema que superficialmente es similar, pero que es más cercano al razonamiento matemático.

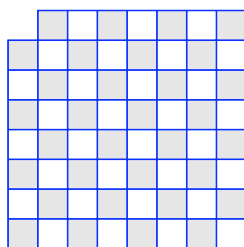
Supongamos que removemos dos esquinas opuestas de un tablero de ajedrez de  $8 \times 8$ , y nos preguntamos: ¿Es posible teselar la figura resultante con 31 dominós?



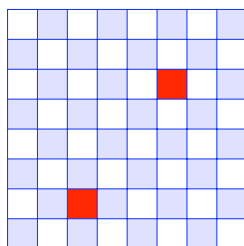
Nuestro tablero no sería de ajedrez si sus



celdas no estuvieran coloreadas alternadamente de blanco y negro. Esta coloración resulta ser crucial a la hora de responder nuestra pregunta.



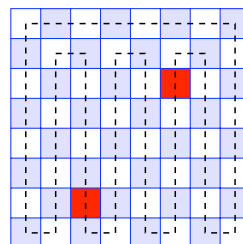
Notemos que, sin importar dónde se ponga, un dominó cubrirá un cuadrado blanco y uno negro del tablero. Por lo tanto, 31 dominós cubrirán 31 cuadrados blancos y 31 cuadrados negros. Sin embargo, el tablero tiene 32 cuadrados negros y 30 cuadrados blancos, por lo tanto tal teselación *no* es posible. Este es un ejemplo de un *argumento de coloración*; tales argumentos son muy comunes al probar que ciertas teselaciones son imposibles.



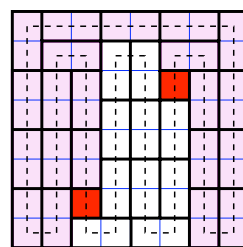
Una variación natural de este problema es remover ahora un cuadrado negro y un cuadrado blanco del tablero de ajedrez. Ahora el tablero resultante tiene el mismo número de cuadrados negros y blancos; ¿es posible teselarlo con dominós?

Probaremos que la respuesta es *sí*, sin importar cuál cuadrado negro y cuál cuadrado blanco removamos. Consideremos cualquier camino cerrado que cubra todas las celdas del tablero de ajedrez como el siguiente:

Ahora sigamos este camino, comenzando con una celda vecina del hueco negro del ta-

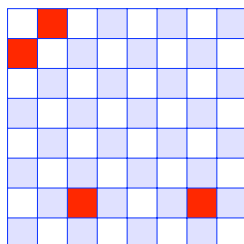


blero. Cubramos la primera y la segunda celda del camino con un dominó; éstas celdas son blanca y negra, respectivamente. Luego cubramos la tercera y cuarta celdas con un dominó; éstas también son blanca y negra, respectivamente. Continuemos de esta forma, hasta que el camino alcance el segundo hueco del tablero. Afortunadamente, este segundo hoyo es blanco, y por lo tanto no hay ninguna brecha entre éste y el último dominó puesto. Por lo tanto podemos evitar este hoyo, y continuar cubriendo el camino con dominós sucesivos. Cuando el camino vuelve al primer agujero, de nuevo no existe ninguna brecha entre el último dominó puesto y este hoyo. Por lo tanto, el tablero está completamente teselado con dominós. Este procedimiento se ilustra a continuación.



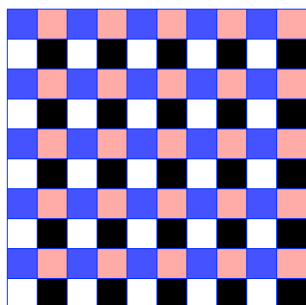
¿Qué pasa si removemos *dos* cuadrados negros y *dos* cuadrados blancos? Si removemos los cuatro cuadrados más cercanos a una esquina del tablero, obviamente existe una teselación con dominós. Por otra parte, en el ejemplo de abajo, una teselación con dominós no existe, pues no hay manera de que un dominó cubra el cuadrado superior izquierdo.





Esta pregunta es claramente más sutil que la anterior. El problema de describir cuáles subconjuntos del tablero de ajedrez pueden ser teselados con dominós nos lleva a matemáticas muy interesantes. Diremos más al respecto en la Sección 5.

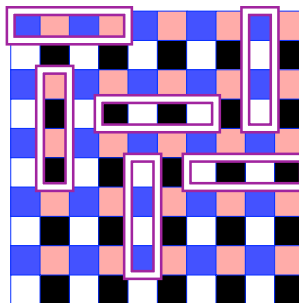
Ahora, consideraremos un ejemplo más difícil de un argumento de coloración, para probar que un tablero de  $10 \times 10$  *no puede* ser teselado con rectángulos de  $1 \times 4$ .



Una coloración como la del tablero de ajedrez no nos da información sobre la existencia de una teselación. En vez de esta coloración, usemos cuatro colores como se muestra en la figura. Cualquier pieza de  $1 \times 4$  que pongamos en este tablero cubrirá un número *par* (posiblemente cero) de cuadrados de cada color.

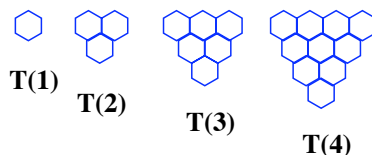
Por lo tanto, si hubiera una teselación del tablero, el número total de cuadrados de cada color sería par. Pero hay 25 cuadrados de cada color, por lo tanto una teselación es imposible.

Con estos ejemplos en mente, podemos idear muchas situaciones similares donde cierta coloración del tablero hace imposible

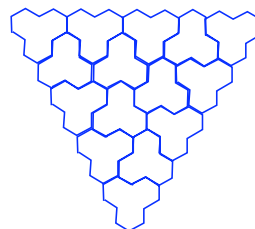


teselarlo. Ahora discutiremos un problema de teselación que no puede resolverse usando tal argumento de coloración.

Consideremos la región  $T(n)$  consistente de un arreglo triangular de  $n(n+1)/2$  hexágonos regulares unitarios.



Llamemos a  $T(2)$  un *trípode*. Queremos saber los valores de  $n$  para los que  $T(n)$  pueda ser teselada con trípodes. Por ejemplo,  $T(9)$  puede teselarse así:



Como cada trípode cubre 3 hexágonos,  $n(n+1)/2$  debe ser un múltiplo de 3 para que  $T(n)$  sea teselable. No obstante, esto no explica por qué regiones como  $T(3)$  y  $T(5)$  no se puedan teselar.

Conway [21] probó que el arreglo triangular  $T(n)$  se puede teselar con trípodes si y sólo si  $n = 12k, 12k+2, 12k+9$  o  $12k+11$  para algún  $k \geq 0$ . Los valores más pequeños de  $n$  para los cuales  $T(n)$  puede teselarse son 0, 2, 9, 11, 12, 14, 21, 23, 24, 26, 33 y



35. La prueba de Conway usa cierto grupo no abeliano que detecta información sobre la teselación, mientras que los argumentos de coloración siempre pueden reformularse en términos de grupos *abelianos*. De hecho, es posible probar que ningún argumento de coloración puede demostrar el teorema de Conway [17].

### 3. Contar teselaciones, exactamente.

Una vez sabemos que cierto problema de teselación puede ser resuelto, podemos ir más allá y preguntarnos: ¿Cuántas soluciones existen?

Como vimos antes, existen 2339 formas (salvo simetría) de teselar un rectángulo de  $6 \times 10$  usando cada uno de los 12 pentominós exactamente una vez. Tal vez resulta interesante que este número sea tan grande, pero la respuesta exacta no es tan interesante, especialmente porque se ha hallado mediante un computador.

El primer resultado significativo acerca del número de teselaciones fue obtenido independientemente por Fisher y Temperley [7] y por Kasteleyn [13] en 1961. Ellos encontraron que el número de teselaciones de un rectángulo de  $2m \times 2n$  con  $2mn$  dominós es igual a

$$4^{mn} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left( \cos^2 \frac{j\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right).$$

Aquí  $\prod$  denota *producto* y  $\pi$  denota  $180^\circ$ , entonces la expresión anterior está dada por  $4^{mn}$  veces un producto de sumas de cuadrados de cosenos, tales como

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ = 0,3090169938....$$

¡Esta es una fórmula asombrosa! Los números que estamos multiplicando no son enteros; en la mayoría de los casos, ni siquiera

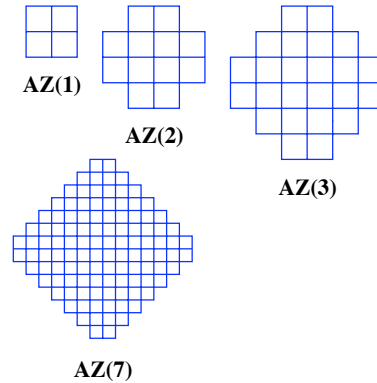
son números racionales. Cuando multiplicamos estos números milagrosamente obtenemos un entero, y este entero es exactamente el número de teselaciones con dominós del rectángulo de  $2m \times 2n$ .

Por ejemplo, para  $m = 2$  y  $n = 3$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} & 4^6 (\cos^2 36^\circ + \cos^2 25,71\dots^\circ) \times \\ & (\cos^2 36^\circ + \cos^2 51,43\dots^\circ) \times \\ & (\cos^2 36^\circ + \cos^2 77,14\dots^\circ) \times \\ & (\cos^2 72^\circ + \cos^2 25,71\dots^\circ) \times \\ & (\cos^2 72^\circ + \cos^2 51,43\dots^\circ) \times \\ & (\cos^2 72^\circ + \cos^2 77,14\dots^\circ) \\ & = 4^6 (1,4662\dots) (1,0432\dots) (0,7040\dots) \times \\ & (0,9072\dots) (0,4842\dots) (0,1450\dots) \\ & = 281. \end{aligned}$$

Invitamos a los lectores escépticos que dispongan de mucho tiempo libre a que hallen todas las teselaciones con dominós de un rectángulo de  $4 \times 6$ , y verifiquen que hay exactamente 281 de ellas.

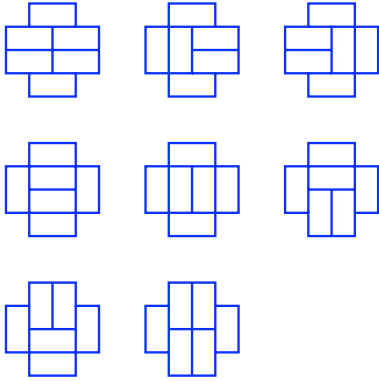
Para demostrar este resultado, Kasteleyn expresó el número deseado en términos de un cierto Pfaffiano, y redujo su cálculo a la evaluación de un determinante relacionado. Fisher y Temperley dieron una prueba diferente usando el método de la matriz de transferencia, una técnica usada frecuentemente en mecánica estadística y combinatoria enumerativa.





Existe una familia diferente de regiones para las cuales el número de teselaciones con dominós es sorprendentemente simple. El diamante azteca  $AZ(n)$  se obtiene apilando sucesivamente filas centradas de longitud  $2, 4, \dots, 2n, 2n, \dots, 4, 2$ , como se muestra en la figura.

El diamante azteca de orden 2,  $AZ(2)$ , tiene las siguientes ocho teselaciones:



Elkies, Kuperberg, Larsen y Propp [6] demostraron que el número de teselaciones con dominós de  $AZ(n)$  es  $2^{n(n+1)/2}$ . La siguiente tabla muestra el número de teselaciones de  $AZ(n)$  para los primeros valores de  $n$ .

1	2	3	4	5	6
2	8	64	1024	32768	2097152

Como  $2^{(n+1)(n+2)/2} / 2^{n(n+1)/2} = 2^{n+1}$ , uno podría tratar de asociar  $2^{n+1}$  teselaciones con dominós de  $AZ(n+1)$  a cada teselación con dominós de  $AZ(n)$ , de manera que cada teselación de  $AZ(n+1)$  ocurra exactamente una vez. Esta es una de las cuatro pruebas originales halladas en [6]; ahora existen alrededor de 12 pruebas de este resultado. Ninguna de estas pruebas es tan simple como la respuesta  $2^{n(n+1)/2}$  podría sugerirlo.

## 4. Contar teselaciones, aproximadamente.

Algunas veces estamos interesados en estimar el número de teselaciones de cierta región. En algunos casos, queremos hacer esto porque no podemos hallar una fórmula exacta. En otros casos, paradójicamente, podríamos preferir una fórmula aproximada en vez de una fórmula exacta. Un buen ejemplo es el número de teselaciones con dominós de un rectángulo. La fórmula exacta que tenemos no nos da ninguna indicación de qué tan grande es este número.

Por ejemplo, como los diamantes aztecas son cuadrados rotados, podríamos preguntarnos: ¿Cómo se comparan el número de teselaciones de un diamante azteca y de un cuadrado de aproximadamente el mismo tamaño? Después de experimentar un poco con estas figuras, uno nota que poner un dominó en el borde de un diamante azteca casi siempre fuerza la posición de muchos otros dominós. Esto casi nunca pasa en el cuadrado. Este hecho nos puede llevar a suponer que el cuadrado debería tener más teselaciones que el diamante azteca.

Para tratar de hacer esta idea precisa, daremos una definición. Si una región con  $N$  cuadrados tiene  $T$  teselaciones, diremos que tiene  $\sqrt[N]{T}$  *grados de libertad por cuadrado*. La motivación es la siguiente: si cada cuadrado pudiera decidir independientemente cómo le gustaría ser cubierto, y si tuviera  $\sqrt[N]{T}$  posibilidades de elección, entonces el número total de elecciones sería  $T$ .

El diamante azteca  $AZ(n)$  consiste de  $N = 2n(n+1)$  cuadrados, y tiene  $T = 2^{n(n+1)/2}$  teselaciones. Por tanto, el número de grados de libertad por cuadrado en  $AZ(n)$  es:

$$\sqrt[N]{T} = \sqrt[4]{2} = 1,189207115\dots$$

Para el cuadrado de  $2n \times 2n$ , la fórmula exacta para el número de teselaciones es en cierta



forma insatisfactoria, porque no nos dice nada sobre el tamaño de este número. Afortunadamente, como Kasteleyn, Fisher y Temperley observaron, uno puede usar su fórmula para probar que el número de teselaciones con dominós de un cuadrado de  $2n \times 2n$  es aproximadamente  $C^{4n^2}$ , donde

$$\begin{aligned} C &= e^{G/\pi} \\ &= 1,338515152\dots \end{aligned}$$

Aquí  $G$  denota la *constante de Catalan*, la cual se define como sigue:

$$\begin{aligned} G &= 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \\ &= 0,9159655941\dots \end{aligned}$$

Así nuestra intuición estuvo acertada. El tablero cuadrado es “más fácil” de teselar que el diamante azteca, en el sentido en que éste tiene aproximadamente 1,3385... grados de libertad por cuadrado, mientras que el diamante azteca tiene 1,1892...

## 5. Demostrar que una teselación no existe.

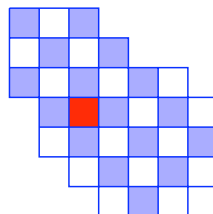
Como vimos en la Sección 2, hay muchos problemas de teselación donde existe una teselación, pero hallarla es una tarea difícil. Sin embargo, una vez la hemos encontrado, es muy sencillo demostrar su existencia a alguien: ¡Podemos simplemente mostrarles la teselación!

¿Podemos decir algo similar en el caso de que una teselación no exista? Como vimos en la Sección 2, puede ser difícil probar que una teselación no existe. ¿Es cierto, no obstante, que si una teselación no existe, entonces hay una forma fácil de convencer de ésto a alguien?

En un sentido preciso, es casi seguro que la respuesta a esta pregunta es *no* en general, incluso para teselaciones de regiones usando

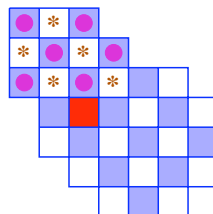
rectángulos de tamaño  $1 \times 3$  [1]. Sin embargo, sorprendentemente, la respuesta es *sí* para teselaciones con dominós.

Antes de establecer el resultado en general, ilustrémoslo con un ejemplo. Consideremos la siguiente región, consistente de 16 cuadrados negros y 16 cuadrados blancos. (La celda sombreada es un agujero en la región.)



Uno puede buscar caso por caso hasta convencerse de que esta región no puede teselarse con dominós. Sabiendo esto, ¿existirá una manera más fácil y rápida de convencer a alguien de esto, sin necesidad de repetir ese análisis de casos?

Una manera de hacerlo es la siguiente. Consideremos los seis cuadrados negros marcados con un •. Estos son adyacentes a un total de cinco cuadrados blancos, los cuales están marcados con un \*. Necesitaríamos seis figuras distintas para cubrir los seis cuadrados negros marcados, y cada una de estas figuras tendría que cubrir uno de los cinco cuadrados blancos marcados. Esto hace que una teselación sea imposible.



Philip Hall [11] mostró que en *cualquier* región no teselable con dominós, se puede encontrar tal demostración de imposibilidad.



Más precisamente, se pueden hallar  $k$  celdas de un color con menos de  $k$  vecinos. Por lo tanto, para probarle a alguien de que es imposible teselar una región, podemos simplemente mostrarle esas  $k$  celdas y sus vecinos.

El teorema de Hall es más general, y es comúnmente conocido como el *teorema del matrimonio*. El nombre proviene de pensar en las celdas negras como hombres y en las celdas blancas como mujeres. Estos hombres y mujeres son bastante conservadores: sólo desean casarse con uno de sus vecinos. Nosotros somos los que creamos las parejas; tratamos de encontrar un arreglo en el cual cada uno esté felizmente casado. El teorema del matrimonio nos dice exactamente cuando existe tal arreglo.

## 6. Teselar rectángulos con rectángulos.

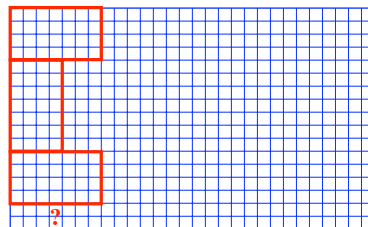
Una de las situaciones más naturales al hablar de teselación es la de teselar un rectángulo con rectángulos más pequeños. Ahora presentaremos tres bellos resultados de esta forma.

La primera pregunta que queremos explorar es: ¿Cuándo se puede teselar un rectángulo de  $m \times n$  con rectángulos de  $a \times b$  (en cualquier orientación)? Comencemos esta discusión con algunos ejemplos motivantes.

¿Puede un rectángulo de  $7 \times 10$  ser teselado con rectángulos de  $2 \times 3$ ? Esto es claramente imposible, pues cada rectángulo de  $2 \times 3$  contiene 6 cuadrados, mientras que el número de cuadrados en un rectángulo de  $7 \times 10$  es 70, que no es un múltiplo de 6. Para que una teselación sea posible, el número de celdas del rectángulo grande debe ser divisible por el número de celdas del rectángulo pequeño. ¿Es suficiente esta condición?

Intentemos teselar un rectángulo de  $17 \times 28$  con rectángulos de  $4 \times 7$ . El argumento del párrafo anterior no aplica aquí; sólo nos dice

que el número de figuras que necesitamos es 17. Tratemos de cubrir primero la columna de la izquierda.



Nuestro primer intento falló. Después de cubrir las primeras 4 celdas de la primera columna con la primer figura, las siguientes 7 celdas con la segunda figura, y las siguientes 4 celdas con la tercer figura, no hay espacio para que una cuarta figura cubra las dos celdas restantes. De hecho, si logramos cubrir las 17 celdas de la primera columna con figuras de  $4 \times 7$ , habremos escrito 17 como una suma de 4s y 7s. Pero es sencillo ver que esto no es posible, y por lo tanto no existe una teselación. Hemos encontrado una segunda razón para que una teselación no exista: Puede resultar imposible cubrir la primera fila o columna, porque  $m$  o  $n$  no puede escribirse como una suma de  $as$  y  $bs$ .

¿Es posible entonces teselar un rectángulo de  $10 \times 15$  usando rectángulos de  $1 \times 6$ ? 150 es múltiplo de 6, y tanto 10 como 15 se pueden escribir como una suma de 1s y 6s. Sin embargo, este problema de teselación también es imposible!

La respuesta completa a nuestra pregunta fue dada por de Bruijn y Klarner [4, 14]. Ellos probaron que un rectángulo de  $m \times n$  puede teselarse con rectángulos de  $a \times b$  si y sólo si:

- $mn$  es divisible por  $ab$ ,
- la primera fila y columna pueden cubrirse; es decir, tanto  $m$  como  $n$  se pueden escribir como una suma de  $as$  y  $bs$ , y

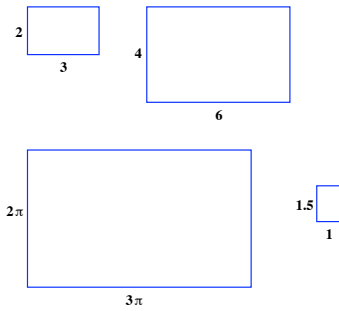


- $m$  o  $n$  es divisible por  $a$ , y  $m$  o  $n$  es divisible por  $b$ .

Como 10 y 15 no son divisibles por 6, el rectángulo de  $10 \times 15$  *no puede* ser teselado con rectángulos de  $1 \times 6$ . Ahora existen muchas pruebas del teorema de de Bruijn y Klarner. Una prueba particularmente elegante usa propiedades de las raíces complejas de la unidad [4, 14]. Una variante muy interesante de este problema, junto con 14 (!) demostraciones, aparece en [22].

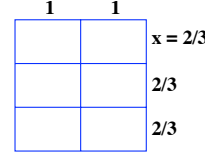
El segundo problema que queremos discutir es el siguiente. Sea  $x > 0$ , por ejemplo  $x = \sqrt{2}$ . ¿Se puede teselar un cuadrado con un número finito de rectángulos *semejantes* a un rectángulo de  $1 \times x$  (en cualquier orientación)? En otras palabras, ¿se puede teselar un rectángulo con un número finito de rectángulos, todos de la forma  $a \times ax$  (donde  $a$  puede variar)?

Por ejemplo, para  $x = 2/3$ , algunas de las figuras que podemos usar son las siguientes:



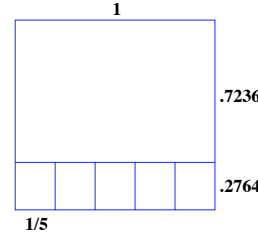
Estas figuras tienen la misma forma, pero varían en tamaño. Sin embargo, en este caso sólo necesitamos un tamaño, pues podemos teselar un cuadrado de  $2 \times 2$  con seis rectángulos de  $1 \times 2/3$ .

Por razones que se aclararán más adelante, queremos hacer notar que  $x = 2/3$  satisface la ecuación  $3x - 2 = 0$ . Observemos también



que una construcción similar funcionará para cualquier número racional positivo  $x = p/q$ .

Intentemos construir una teselación para un cuadrado con rectángulos semejantes de al menos dos tamaños diferentes. Existe una teselación dada aproximadamente por el siguiente dibujo. Los rectángulos son semejantes puesto que  $0,7236 \dots / 1 = 0,2/0,2764 \dots$



¿Cómo hallamos esta configuración? Supongamos que queremos formar un cuadrado como se muestra en la figura: poniendo cinco copias de un rectángulo en una fila, y luego colocando encima de ellos un rectángulo más grande de la misma forma, recostado sobre su lado más largo. Supongamos que sabemos que el cuadrado tiene lado de longitud 1, pero no sabemos las dimensiones del rectángulo. Sean  $1 \times x$  las dimensiones del rectángulo grande. Luego la altura de cada rectángulo pequeño es  $1 - x$ . Como los rectángulos pequeños son semejantes al grande, su ancho es  $x(1 - x)$ . Puestos juntos en la teselación, su ancho total es de  $5x(1 - x)$ , que debe ser igual a 1.

Por lo tanto, la figura anterior es una solución a nuestro problema si  $x$  satisface la ecuación  $5x(1 - x) = 1$ , la cual reescribimos como  $5x^2 - 5x + 1 = 0$ . Un valor de  $x$  que



satisface esta ecuación es

$$x = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} = 0,7236067977 \dots,$$

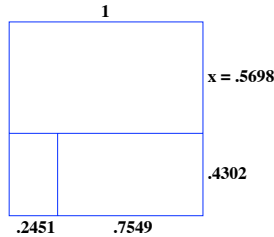
dando lugar a la teselación ilustrada antes.

Pero recordemos que todo polinomio cuadrático tiene dos raíces; la otra raíz es

$$x = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} = 0,2763932023 \dots,$$

y ésta da origen a una teselación distinta que también satisface las condiciones del problema.

Puede resultar inesperado que nuestro problema de teselación tenga una solución para estos dos valores de  $x$  algo complicados. De hecho, esta situación se puede tornar mucho más compleja. Hallemos una teselación usando tres rectángulos semejantes de diferentes tamaños.



Supongamos que el rectángulo más grande tiene dimensiones  $1 \times x$ . Imitando el argumento anterior, encontramos que  $x$  satisface la ecuación

$$x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

Un valor de  $x$  que satisface esta ecuación es

$$x = 0,5698402910 \dots$$

Para este valor de  $x$ , el problema de teselación se puede resolver como antes. El polinomio anterior tiene grado tres, y por lo tanto tiene otras dos soluciones. Estas son aproximadamente  $0,215 + 1,307\sqrt{-1}$  y

$0,215 - 1,307\sqrt{-1}$ . Estos dos números complejos no nos dan soluciones reales al problema de teselación.

Freiling y Rinne [8] y Laczkovich y Szekeeres [15], independientemente, dieron esta curiosa respuesta al problema general: Un cuadrado puede ser teselado con un número finito de rectángulos semejantes a un rectángulo de  $1 \times x$  si y sólo si:

- $x$  es una raíz de un polinomio con coeficientes enteros, y
- para el polinomio entero de menor grado que  $x$  satisface, toda raíz  $a + b\sqrt{-1}$  cumple que  $a > 0$ .

Es muy sorprendente que estas raíces complejas, las cuales parecen no relacionarse en absoluto con el problema de teselación, de hecho juegan un papel fundamental en él. En el ejemplo anterior, una solución para un rectángulo de  $1 \times 0,5698 \dots$  es posible solo porque  $0,215 \dots$  es un número positivo. Ilustremos mejor este resultado con algunos ejemplos.

El valor  $x = \sqrt{2}$  satisface una ecuación polinomial con coeficientes enteros, a saber,  $x^2 = 2$ . Sin embargo, la otra raíz de la ecuación es  $-\sqrt{2} < 0$ . Por lo tanto un cuadrado *no puede* ser teselado con un número finito de rectángulos semejantes al rectángulo de  $1 \times \sqrt{2}$ .

Por otra parte,  $x = \sqrt{2} + \frac{17}{12}$  satisface la ecuación cuadrática  $144x^2 - 408x + 1 = 0$ , y su otra raíz es  $-\sqrt{2} + \frac{17}{12} = 0,002453 \dots > 0$ . Así, un cuadrado *puede* teselarse con un número finito de rectángulos semejantes a un rectángulo de  $1 \times (\sqrt{2} + \frac{17}{12})$ . ¿Cómo hacemos esto en la práctica?

Similarmente,  $x = \sqrt[3]{2}$  satisface la ecuación  $x^3 - 2 = 0$ . Las otras dos raíces para esta ecuación son  $-\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \pm \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$ . Como  $-\frac{\sqrt[3]{2}}{2} < 0$ , un cuadrado *no puede* teselarse con un número finito de rectángulos semejantes a un rectángulo de  $1 \times \sqrt[3]{2}$ .



Finalmente, sea  $r/s$  un número racional y sea  $x = \frac{r}{s} + \sqrt[3]{2}$ . Se puede verificar que esta es una raíz de un polinomio cúbico cuyas otras dos raíces son:

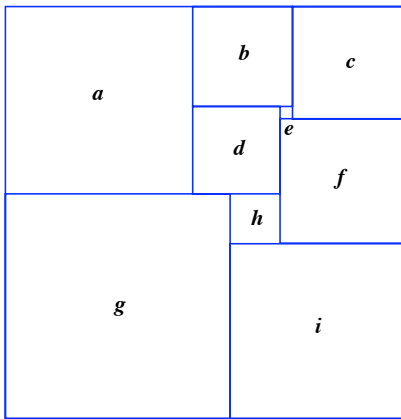
$$\left(\frac{r}{s} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right) \pm \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}.$$

Se sigue que un cuadrado puede teselarse con un número finito de rectángulos semejantes a un rectángulo de  $1 \times (\frac{r}{s} + \sqrt[3]{2})$  si y sólo si

$$\frac{r}{s} > \frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Como un acertijo interesante, el lector puede escoger su fracción favorita mayor que  $\sqrt[3]{2}/2$ , y teselar un cuadrado con rectángulos semejantes a un rectángulo de  $1 \times (\frac{r}{s} + \sqrt[3]{2})$ .

El tercer problema que queremos discutir está motivado por la siguiente teselación excepcional de un rectángulo con nueve cuadrados, todos de diferente tamaño. (Pronto veremos cuáles son las medidas de los cuadrados y del rectángulo.) Tales teselaciones se conocen como *teselaciones perfectas*.



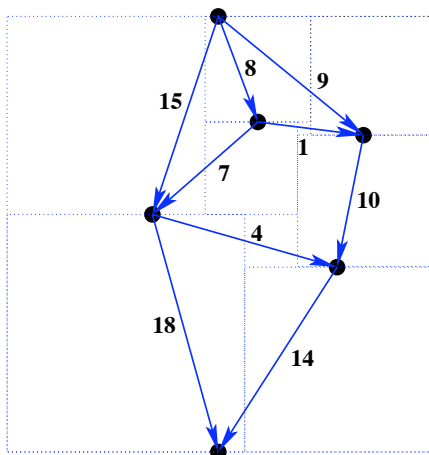
Para hallar teselaciones perfectas de rectángulos, podemos usar el acercamiento del anterior problema. Comenzamos proponiendo un diseño tentativo de los cuadrados, tal como el patrón mostrado, sin saber qué medidas tienen. Denotamos la longitud del lado de cada cuadrado por

una variable. Por cada línea horizontal al interior del rectángulo, escribimos la siguiente ecuación: La longitud total de los cuadrados puestos sobre la línea es igual a la longitud total de los cuadrados que penden de la línea. Por ejemplo, tenemos las “ecuaciones horizontales”  $a + d = g + h$  y  $b = d + e$ . Similarmente, tenemos una “ecuación vertical” por cada línea vertical en el interior del rectángulo, tal como  $a = b + d$  o  $d + h = e + f$ . Finalmente, escribimos las ecuaciones que dicen que los lados superior e inferior del rectángulo son iguales, y los lados izquierdo y derecho son iguales. En este caso, estas son  $a + b + c = g + i$  y  $a + g = c + f + i$ . Así, queda esperar que el sistema resultante de ecuaciones lineales tenga una solución, y más aun, una donde los valores de las variables sean positivos y distintos. Para el diseño propuesto arriba, el sistema tiene una solución única salvo multiplicación escalar:  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i) = (15, 8, 9, 7, 1, 10, 18, 4, 14)$ . El rectángulo grande tiene dimensiones  $32 \times 33$ .

Sorprendentemente, el sistema de ecuaciones lineales resultante *siempre* tiene solución única salvo múltiplo escalar, para *cualquier* diseño de los cuadrados propuesto. (Desafortunadamente, las “longitudes” resultantes usualmente no son positivas ni distintas.) En 1936, Brooks, Smith, Stone, y Tutte [2] dieron una explicación muy bonita de este hecho. Ellos construyeron un grafo dirigido cuyos vértices son las líneas horizontales dentro del rectángulo. Hay una arista por cada cuadrado pequeño, la cual va de su línea horizontal superior a su línea horizontal inferior. El diagrama siguiente muestra el grafo resultante para nuestra teselación perfecta del rectángulo de  $32 \times 33$ .

Podemos pensar en este grafo como una red eléctrica de resistores unitarios, donde la corriente que fluye a través de cada cable es igual a la longitud del cuadrado correspondiente en la teselación. Las “ecuaciones ho-



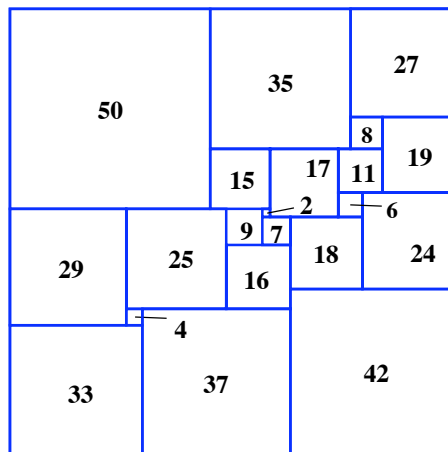


“horizontales” para las longitudes de los lados de los cuadrados son equivalentes a las ecuaciones de conservación de la corriente en esta red, y las “ecuaciones verticales” son equivalentes a la ley de Ohm. Sabiendo esto, nuestra proposición es esencialmente equivalente al teorema de Kirchhoff: El flujo en cada cable es único salvo multiplicación escalar; es decir, está determinado únicamente una vez conocemos la diferencia de potencial entre algún par de vértices.

Brooks, Smith, Stone, y Tutte estaban especialmente interesados en estudiar teselaciones perfectas de cuadrados. Esto también tiene una interpretación muy elegante en términos de redes. Para hallar teselaciones de cuadrados, necesitaríamos una ecuación lineal adicional, que establezca que las longitudes horizontal y vertical del rectángulo son iguales. En el lenguaje de redes eléctricas, esto es equivalente a decir que la red tiene resistencia total igual a 1.

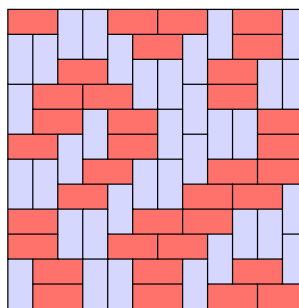
Aunque esta correspondencia entre teselaciones y redes es muy bonita conceptualmente, ella no hace fácil el problema de construir teselaciones perfectas de cuadrados, o incluso de rectángulos. De hecho, después de desarrollar esta teoría, Stone gastó algún tiempo tratando de probar que una teselación perfecta de un cuadrado era imposible. Roland Sprague construyó finalmente una en 1939,

teselando un cuadrado de longitud 4205 con 55 cuadrados. Desde entonces, mucho esfuerzo y horas de computador se han gastado tratando de encontrar mejores construcciones. Duikvestijn y su computador [5] probaron que el número mínimo posible de cuadrados en una teselación perfecta de un cuadrado es 21; esa teselación mínima se muestra a continuación.



## 7. ¿Cómo es una teselación típica?

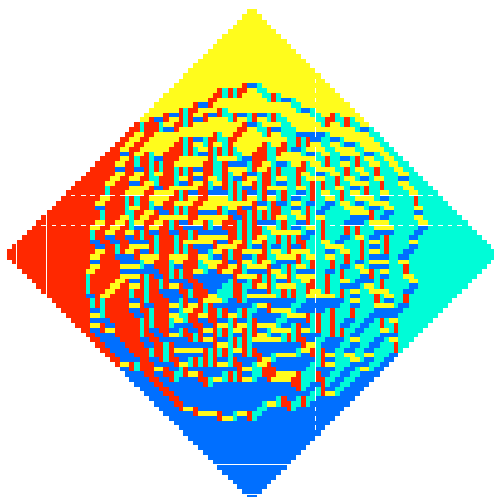
Supongamos que tenemos todas las soluciones posibles a un problema de teselación, y escogemos una de ellas al azar. ¿Podemos predecir lo que veremos?



Una teselación aleatoria de un cuadrado de  $12 \times 12$  con dominós no exhibe ninguna es-



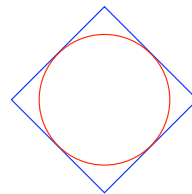
estructura obvia. Comparémosla con una teselación aleatoria del diamante azteca de orden 50. En esta teselación, los dominós horizontales han sido coloreados de amarillo o azul, y los verticales de rojo o verde.



Estos dos gráficos fueron creados por el grupo de investigación en teselaciones de Jim Propp.

Este dibujo sugiere que se debe poder demostrar algo interesante sobre teselaciones aleatorias. La teselación es claramente muy regular en las esquinas, y se vuelve más caótica a medida que nos apartamos de las orillas. Allí tenemos una *región de regularidad* bien definida, y podemos predecir su forma. Jockusch, Propp y Shor [12] probaron que para  $n$  muy grande, y para la “mayoría” de las teselaciones con dominó del diamante azteca  $AZ(n)$ , la región de regularidad “se aproxima” a la frontera de un círculo tangente a los cuatro lados fronterizos. Se necesita un poco de teoría sofisticada de probabilidad para hacer precisos los términos “mayoría” y “aproxima”, pero el significado intuitivo es claro.

Este resultado es conocido como el *teorema del círculo ártico*. El círculo tangente es el círculo ártico; la teselación se “congela”

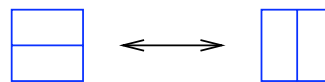


fuera de éste. Varios fenómenos similares se han observado y (en algunos casos) probado en otros problemas de teselación.

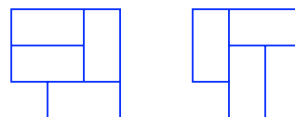
## 8. Relaciones entre las teselaciones.

Cuando estudiamos el conjunto de todas las teselaciones de una región, puede ser ventajoso saber cómo “navegar” dentro de este conjunto. Supongamos que tenemos una solución a un problema de teselación, y queremos encontrar otra. En lugar de comenzar de nuevo, probablemente es más fácil hallar una segunda solución haciendo pequeños cambios a la primera. Así, podríamos tratar de obtener una tercera solución a partir de la segunda, luego una cuarta, y así sucesivamente.

En el caso de teselaciones con dominó, existe una forma muy fácil de hacer esto. Un “giro” en una teselación con dominó consiste en revertir la orientación de dos dominós que forman un cuadrado de  $2 \times 2$ .

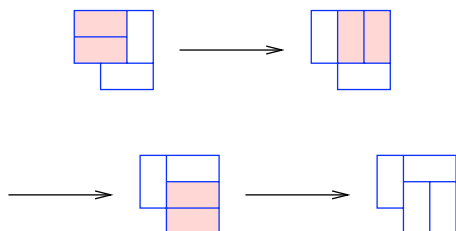


Esto puede parecer una transformación trivial para obtener una teselación a partir de otra. Sin embargo, es sorprendentemente poderosa. Consideremos las siguientes dos teselaciones de una región.



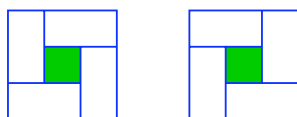


Aunque parecen muy distintas, podemos llegar a una partiendo de la otra girando sucesivamente bloques de  $2 \times 2$ :



Thurston [21] probó que esto es un fenómeno general. Para *toda* región  $R$  sin agujeros, toda teselación con dominós de  $R$  puede lograrse a partir de *cualquier* otra por medio de una sucesión de giros.

Este teorema tiene numerosas aplicaciones en el estudio de teselaciones con dominós. Vale la pena mencionar que la afirmación puede ser falsa para regiones con agujeros, como se muestra en las dos teselaciones de un cuadrado  $3 \times 3$  con un agujero en el medio. Propp [19] demostró una versión de este teorema para regiones con agujeros, pero no la discutiremos aquí.



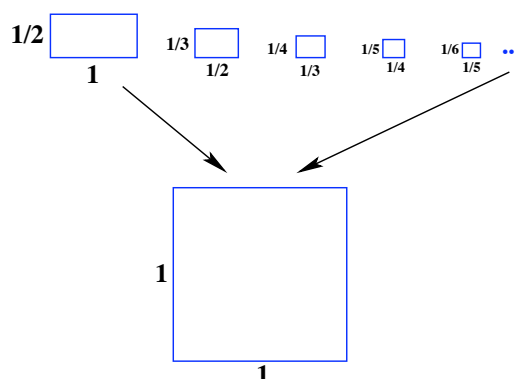
## 9. Confrontando el infinito.

Ahora discutimos algunas preguntas de teselación que involucran regiones arbitrariamente grandes o figuras arbitrariamente pequeñas.

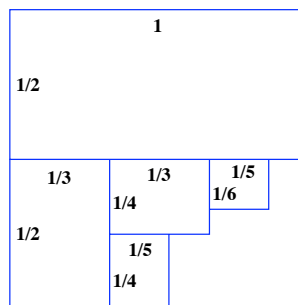
La primera pregunta es motivada por la siguiente identidad:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1$$

Consideremos infinitas figuras rectangulares de dimensiones  $1 \times \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}, \dots$ . Estas figuras se vuelven cada vez más pequeñas, y la ecuación anterior muestra que su área total es exactamente igual a 1. ¿Es posible teselar un cuadrado unitario usando cada una de estas figuras exactamente una vez?



Este parece ser un problema bastante difícil. Un intento inicial muestra cómo encajar las primeras cinco figuras. No obstante, es difícil imaginar cómo podemos encajar todas las piezas en un cuadrado sin dejar brecha alguna.

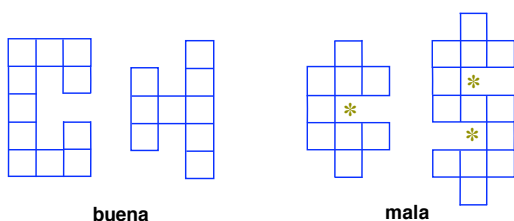


Hasta ahora, nadie ha sido capaz de encontrar una teselación, o de probar que no existe. Paulhus [17] se ha acercado bastante; él encontró una forma de encajar todos estos rectángulos dentro de un cuadrado de longitud 1,000000001. Claramente esta no es una teselación, pues no cubre el cuadrado completamente.



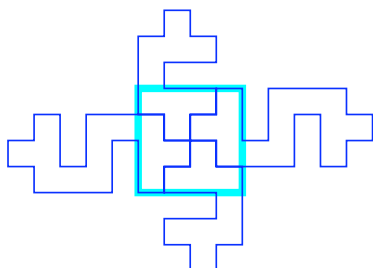
Ahora discutamos un problema similar que hace necesario considerar regiones indeterminadamente grandes. Recordemos que un poliminó es una colección de cuadrados unitarios organizados de tal forma que tengan lados coincidentes.

Diremos que una colección de poliminós es “buena” si es posible teselar completamente el plano usando las fichas de dicha colección, y “mala” en otro caso. Una colección buena de poliminós y una mala se muestran a continuación.



Es fácil ver por qué es imposible teselar completamente el plano con la colección mala mostrada arriba. Una vez ubicamos una figura, el (los) cuadrado(s) marcado(s) con \* no se puede(n) cubrir con otra figura.

Sin embargo, podemos preguntarnos: ¿Cuál es el cuadrado más grande que podemos cubrir con una teselación? Después de algunos intentos, encontraremos que es posible cubrir un cuadrado  $4 \times 4$ .



No obstante, es imposible cubrir un cuadrado  $5 \times 5$ . Cualquier intento de cubrir la celda central del cuadrado con una figura forzará a que uno de los asteriscos de esa figura quede al interior del cuadrado también.

En general, la pregunta de cuándo una co-

lección dada de poliminós puede cubrir un cuadrado dado es extremadamente difícil. Un profundo resultado de lógica matemática establece que no existe un algoritmo que decida la respuesta a esta pregunta.<sup>1</sup>

Una consecuencia inesperada de este profundo resultado es la siguiente. Consideremos todas las colecciones malas de poliminós que tengan en total  $n$  celdas unitarias. Sea  $L(n)$  la longitud del cuadrado más grande que puede cubrirse con una de ellas. La colección mala de nuestro ejemplo, que tiene en total 22 cuadrados unitarios muestra que  $L(22) \geq 4$ .

Uno esperaría que  $L(22)$  fuera razonablemente pequeño. Dada una colección mala de figuras con un total de 22 cuadrados, imaginemos que comenzamos poniendo figuras que encajan bien y cubren el cuadrado más grande posible. Como la colección es mala, en algún punto formaremos inevitablemente un agujero que no podremos cubrir. Parece plausible asumir que esto pasaría muy pronto, pues nuestras figuras son pequeñas.

Sin embargo, ¡los números  $L(n)$  son increíblemente grandes! Si  $f(n)$  es *cualquier* función que puede ser calculada en un computador, incluso con memoria infinita, entonces  $L(n) > f(n)$  para todo  $n$  suficientemente grande. Notemos que los computadores pueden calcular funciones que crecen *muy* rápidamente, tales como

$$f(n) = n^n, \quad f(n) = n^{n^n}, \quad \text{or}$$

$$f(n) = n^{n^{\dots^n}} \quad (\text{una torre de longitud } n), \dots$$

De hecho, todas estas funciones son *diminutas* en comparación con ciertas funciones calculables. A su vez, toda función calculable es *diminuta* en comparación con  $L(n)$ .

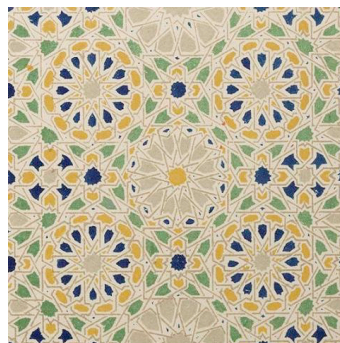
<sup>1</sup>Una pregunta relacionada es la siguiente: Dado un poliminó  $P$ , ¿existe un rectángulo que pueda *teselarse* usando copias de  $P$ ? A pesar de que muchas afirmaciones en la literatura dicen lo contrario, no se sabe si existe un algoritmo que decida esto.



Podemos dar una consecuencia más concreta de este resultado. Existe una colección de poliminós con un número modesto de cuadrados unitarios<sup>2</sup>, probablemente no más de 100, con la siguiente propiedad: Es imposible teselar completamente el plano con esta colección; sin embargo, es posible cubrir completamente los llanos colombo-venezolanos<sup>3</sup>, con una teselación.

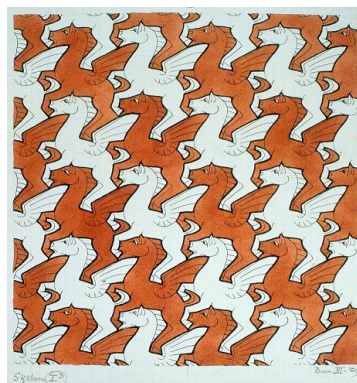
Un tipo de problema muy importante es el de teselar regiones infinitas (no acotadas); en particular, teselar el plano. Este es un tema muy extenso (el libro de 700 páginas de Grünbaum y Shephard [10] está enfocado principalmente en este tema); la falta de espacio sólo nos permite decir unas pocas palabras al respecto.

Un resultado famoso en cristalografía matemática establece que hay 17 patrones diferentes de teselaciones del plano que tienen simetrías en dos direcciones independientes [10, Sec. 6.2]. Estos tipos de simetría se denominan *grupos cristalográficos planos*. El palacio de la Alhambra en Granada, España, que data de los siglos 13 y 14, es reconocido especialmente por su representación de muchos de estos patrones de teselación. A continuación suministramos dos ejemplos.



Owen Jones, *The Grammar of Ornament*, vista 90 y 93. ©1998 Octavo and the Rochester Institute of Technology. Usado con permiso. Imagen por Octavo, [www.octavo.com](http://www.octavo.com).

Otra fuente muy conocida de patrones de teselaciones planas son los dibujos, litografías y grabados del artista gráfico holandés Maurits Cornelis Escher (1898-1972). De nuevo, a continuación damos dos muestras.



Dibujos Simétricos E105 y E110 de M.C. Escher. ©2004 Compañía M.C. Escher, Baarn, Holanda. Derechos reservados.

En dirección opuesta a las teselaciones planas con muchas simetrías, están las teselaciones *sin* simetría. Las más interesantes son las descubiertas por Sir Roger Penrose. Las teselaciones con flechas y cometas son los ejemplos mejor conocidos: queremos teselar

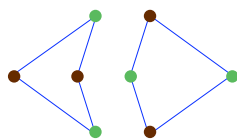
<sup>2</sup>donde un cuadrado unitario tiene lados de 1 cm.

<sup>3</sup>que son muy grandes y muy planos





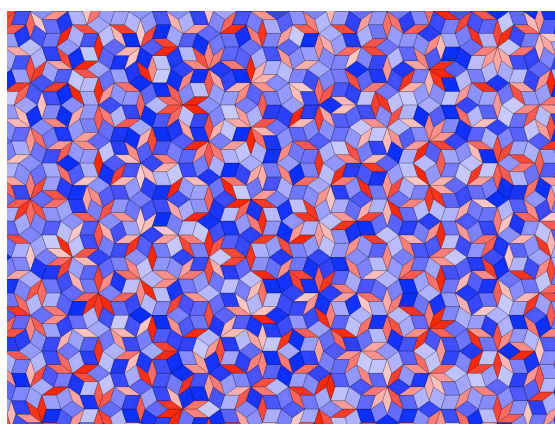
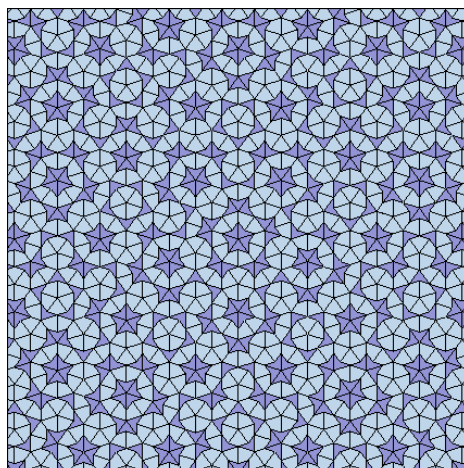
el plano usando las figuras mostradas abajo, con la condición que las figuras solo se pueden unir en vértices que tengan el mismo color.



La coloración de las figuras hace imposible cubrir el plano repitiendo un patrón pequeño en forma regular, como se hizo en las cuatro teselaciones anteriores. Sin embargo, existen infinitas teselaciones del plano usando flechas y cometas [9, 18]. Abajo vemos un bosquejo de una de tales teselaciones, creada por Franz Gähler y disponible en [www.itap.physik.uni-stuttgart.de/~gaehler](http://www.itap.physik.uni-stuttgart.de/~gaehler); ésta tiene muchas características agradables, pero no sigue ningún patrón obvio.

Estas *teselaciones de Penrose* tienen muchas propiedades notables; por ejemplo, toda teselación de Penrose del plano contiene una cantidad infinita de copias de *cualquier* región finita que uno pueda formar usando las figuras.

Nuestro último ejemplo es otra clase de teselación de Penrose, la cual se obtiene adhiriendo dos clases de rombos, sujetos a una regla similar. Esta figura fue creada por Russell Towle en Dutch Flat, CA, con un cuaderno de *Mathematica* disponible en



[library.wolfram.com/infocenter/MathSource/1197/](http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/1197/).

Dejamos que el lector interesado investigue más a fondo el fascinante mundo de las teselaciones del plano.



## Referencias

- [1] D. Beauquier, M. Nivat, E. Rémila and M. Robson. Tiling figures of the plane with two bars. *Comput. Geom.* **5** (1995), 1-25.

Los autores consideran el problema de teselar una región con rectángulos horizontales de  $n \times 1$  y verticales de  $1 \times m$ . El resultado principal es que, para  $n \geq 2$  y  $m > 2$ , decidir cuando tal teselación existe es una pregunta *NP*-completa. También estudian muchas especializaciones de este problema.

- [2] R. Brooks, C. Smith, A. Stone and W. Tutte. The dissection of rectangles into squares. *Duke Math. J.* **7** (1940), 312-340.

Para cada teselación perfecta de un rectángulo, los autores asocian cierto grafo y un flujo de corriente eléctrica a través de éste. Ellos muestran cómo las propiedades de la teselación se reflejan en la red eléctrica. También usan este punto de vista para probar varios resultados acerca de las teselaciones perfectas, y para suministrar nuevos métodos para construirlas.

- [3] N. de Bruijn. Filling boxes with bricks. *Amer. Math. Monthly* **76** (1969), 37-40.

El autor estudia el problema de teselar una caja  $n$ -dimensional de dimensiones enteras  $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$  con ladrillos de dimensiones enteras  $a_1 \times \cdots \times a_n$ . Para que una teselación exista, de Bruijn prueba que cada  $a_i$  debe tener un múltiplo entre los  $A_1, \dots, A_n$ . La caja se denomina un *múltiplo* del ladrillo si se puede teselar de la manera trivial. El autor prueba que el ladrillo sólo puede teselar cajas que son múltiplos suyos si y sólo si  $a_1 | a_2, \dots, a_{n-1} | a_n$ .

- [4] J. Conway and J. Lagarias. Tiling with polyominoes and combinatorial group theory. *J. Combin. Theory Ser. A* **53** (1990), 183-208.

Conway y Lagarias estudian la existencia de una teselación de una región en un retículo regular en  $\mathbb{R}^2$  usando un conjunto finito de figuras. Al estudiar cómo las fronteras de las figuras encajan unas con otras para dar la frontera de la región, ellos dan una condición necesaria y suficiente para que una teselación exista, usando el lenguaje de la teoría combinatoria de grupos.

- [5] A. Duijvestijn. Simple perfect squared square of lowest order. *J. Combin. Theory Ser. B* **25** (1978), 240-243.

La única teselación perfecta de un cuadrado usando el mínimo número posible de cuadrados, 21, se muestra allí.

- [6] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen and J. Propp. Alternating sign matrices and domino tilings I, II. *J. Algebraic Combin.* **1** (1992), 111-132, 219-234.

Se demuestra que el diamante azteca de orden  $n$  tiene  $2^{n(n+1)/2}$  teselaciones con dominós. Se dan cuatro pruebas de ello, explotando la conexión de este objeto con las matrices de signos alternantes, los triángulos monótonos, y la



teoría de representaciones de  $GL(n)$ . La relación con el modelo de Lieb del cuadrado de hielo también se explica.

- [7] M. Fisher and H. Temperley. Dimer problem in statistical mechanics – an exact result. *Philos. Mag.* **6** (1961), 1061-1063.

Se da una fórmula para el número de teselaciones con dominós de un rectángulo, en el lenguaje de la mecánica estadística.

- [8] C. Freiling and D. Rinne. Tiling a square with similar rectangles. *Math. Res. Lett.* **1** (1994), 547-558.

Los autores muestran que un cuadrado se puede teselar con rectángulos semejantes al rectángulo de  $1 \times x$  si y sólo si  $x$  es una raíz de un polinomio con coeficientes enteros cuyas raíces tienen parte real positiva.

- [9] M. Gardner. Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles. *Scientific American* **236** (1977), 110-121.

Este artículo trata los conjuntos de figuras que pueden teselar el plano, pero no pueden hacerlo periódicamente. Después de ciertos antecedentes históricos Gardner se enfoca en las propiedades de los ejemplos mejor conocidos: las teselaciones con dardos y cometas de Penrose.

- [10] B. Grünbaum and G. Shephard. *Tilings and patterns*. W. H. Freeman and Company, New York, 1987.

Este es un extensivo tratado de varios aspectos de las teselaciones, con énfasis en las teselaciones del plano con un número finito de figuras. Por ejemplo, los autores llevan a cabo la tarea de clasificar varios tipos de patrones de teselación en el plano. Otros de los tópicos que se discuten son las teselaciones perfectas de rectángulos y las teselaciones aperiódicas del plano.

- [11] P. Hall. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.* **10** (1935), 26-30.

Dados  $m$  subconjuntos  $T_1, \dots, T_m$  de un conjunto  $S$ , Hall define un *sistema completo de representantes distintos* como un conjunto de  $m$  elementos distintos  $a_1, \dots, a_m$  de  $S$  tales que  $a_i \in T_i$  para todo  $i$ . El autor prueba que tal sistema existe si y sólo si, para cada  $k = 1, \dots, m$ , la unión de cualesquier  $k$  de estos conjuntos contiene al menos  $k$  elementos.

- [12] W. Jockusch, J. Propp and P. Shor. Random domino tilings and the Arctic circle theorem, preprint, 1995, [arXiv:math.CO/9801068](https://arxiv.org/abs/math.CO/9801068).

En una teselación con dominós de un diamante azteca, el diamante se particiona en cinco regiones: cuatro regiones externas cerca de las esquinas donde las figuras se encuentran casi alineadas, y una región central donde las figuras no siguen un patrón predecible. Los autores prueban el teorema del círculo ártico: En una teselación aleatoria de un diamante azteca grande, la región central está extremadamente cerca a un círculo perfecto inscrito en el diamante.



- [13] P. Kasteleyn. The statistics of dimers on a lattice I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Phys.* **27** (1961), 1209-1225.

Kasteleyn prueba fórmulas asintóticas y exactas para el número de teselaciones con dominós de un rectángulo, con orillas o con condiciones de frontera periódicas. Luego discute la relación entre este problema y el modelo de Ising en la mecánica estadística.

- [14] D. Klarner. Packing a rectangle with congruent  $n$ -ominoes. *J. Combin. Theory* **7** (1969), 107-115.

Klarner investiga el problema de teselar un rectángulo usando un número impar de copias de un único poliminó. El autor también caracteriza los rectángulos que pueden ser teselados con copias de un rectángulo de  $a \times b$ , y los rectángulos que pueden teselarse con copias de cierto octominó.

- [15] M. Laczkovich and G. Szekeres. Tilings of the square with similar rectangles. *Discrete Comput. Geom.* **13** (1995), 569-572.

Los autores prueban que un cuadrado puede teselarse con rectángulos semejantes al rectángulo de  $1 \times u$  si y sólo si  $u$  es una raíz de un polinomio con coeficientes enteros tal que todas sus raíces tienen parte real positiva.

- [16] I. Pak. Tile invariants: new horizons. *Theoret. Comput. Sci.* **303** (2003), 303-331.

Dado un conjunto finito de figuras  $T$ , el grupo de invariantes  $G(T)$  consiste de las relaciones lineales que deben satisfacer los números de figuras de cada tipo en las teselaciones de una misma región. Este artículo presenta lo que se conoce sobre  $G(T)$ . Se prueba que estos invariantes son más fuertes que los argumentos clásicos de coloración.

- [17] M. Paulhus. An algorithm for packing squares. *J. Combin. Theory Ser. A* **82** (1998), 147-157.

Paulhus presenta un algoritmo para encajar un conjunto infinito de rectángulos pequeños, cuya área total es  $A$ , dentro de un rectángulo de área un poco mayor que  $A$ . El autor aplica su algoritmo a tres problemas conocidos de esta clase, obteniendo encajamientos extremadamente precisos.

- [18] R. Penrose. Pentaplexity. *Math. Intelligencer* **2** (1979), 32-37.

El autor describe su descubrimiento de las cometas y las flechas: dos clases de cuadriláteros que pueden teselar el plano, pero no periódicamente. Penrose muestra brevemente algunas de las propiedades de estas teselaciones.

- [19] J. Propp. Lattice structure for orientations of graphs, preprint, 1994.

Se muestra que el conjunto de orientaciones de un grafo con la mismas diferencias de flujo alrededor de sus ciclos tiene la estructura de un retículo distributivo. Esto generaliza construcciones similares para matrices de signos alternados y para emparejamientos.



- [20] S. Stein and S. Szabó. *Algebra and tiling. Homomorphisms in the service of geometry*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1994.

Este libro discute la solución a varios problemas de teselación usando herramientas de álgebra abstracta. Dos ejemplos son los siguientes: Un cuadrado no puede teselarse con triángulos de  $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ , y un cuadrado de área entera impar no puede teselarse con triángulos de área unitaria.

- [21] W. Thurston. Conway's tiling groups. *Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 757-773.

El autor presenta una técnica de Conway para estudiar problemas de teselación. Algunas veces es posible etiquetar las orillas de las figuras con elementos de un grupo, de manera que una región puede teselarse si y sólo si el producto (en orden) de las etiquetas de su frontera es la identidad del grupo. También se presenta la idea de una función de altura que levanta las teselaciones en el plano a un dibujo tridimensional. Estas técnicas se aplican a teselaciones con dominós, rombos y trípodes.

- [22] S. Wagon. Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle. *Amer. Math. Monthly* **94** (1987), 601-617.

Wagon da catorce pruebas del siguiente teorema: Si un rectángulo se puede teselar con rectángulos, cada uno de los cuales tiene al menos un lado de longitud entera, entonces el rectángulo teselado también tiene al menos un lado de longitud entera.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SAN FRANCISCO STATE UNIVERSITY, SAN FRANCISCO, CA, USA, [federico@math.sfsu.edu](mailto:federico@math.sfsu.edu)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MIT, CAMBRIDGE, MA, USA, [rstan@math.mit.edu](mailto:rstan@math.mit.edu).